DS 2 - Corrigé

Exercice 1 :

1)
```python
def f(x):
    if x<-2:
        return 1/(2*x)
    elif x<1:
        return x+2
    else:
        return x**2
```

2)
```python
def test(x,y):
    a=(x+y)**3
    b=x**2+y**2
    return a==b
```

3)
```python
def somme(n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S=S+1/(k**(1/2))
    return S
```

4)
```python
def suite(n):
    u=5
    for k in range(2,n+1):   # comme k n'intervient pas
        u=2*u**2-1           # dans l'update de u, on
    return u                 # peut aussi mettre
                             # range(1,n), range(n-1), etc
```

Exercice 2 :

1) La suite (u_n) est arithmétique lorsque : $\boxed{\exists r\in\mathbb{R} : \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+r}$

2) On résout, pour $l\in\mathbb{R}$: $l=5-\frac{3}{2}l \iff \frac{5}{2}l=5 \iff l=2$

On pose $(v_n)=(u_n-2)$. Alors pour $n\in\mathbb{N}$ on a :

$$v_{n+1}=u_{n+1}-2=5-\frac{3}{2}u_n-2=3-\frac{3}{2}u_n$$

Or $v_n=u_n-2$ donc $u_n=v_n+2$. Ainsi :

$$v_{n+1}=3-\frac{3}{2}(v_n+2)=-\frac{3}{2}v_n+3-3=-\frac{3}{2}v_n.$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $-\frac{3}{2}$ et de premier terme $v_0=u_0-2=-3$. Donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n=-3\times\left(-\frac{3}{2}\right)^n=u_n-2$$

et donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \boxed{u_n=2-3\times\left(-\frac{3}{2}\right)^n}$$

3) On a : $$S_n=\sum_{k=0}^{n+1}(n-2k)=\sum_{k=0}^{n+1}n-2\sum_{k=0}^{n+1}k$$
$$=n\times(n+2)-2\times\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$
$$=(n+2)\big(n-(n+1)\big)$$
$$=\boxed{-n-2}$$

et $$T_n=\sum_{k=0}^{n}2^k3^{n-k}=3^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k=3^n\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$$
$$=3^{n+1}\times\left(1-\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\right)$$
$$=\boxed{3^{n+1}-2^{n+1}}$$

Exercice 3 :

1) Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$2\sin(x)-1=0 \iff \sin(x)=\frac{1}{2}$$
$$\iff \sin(x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} : x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

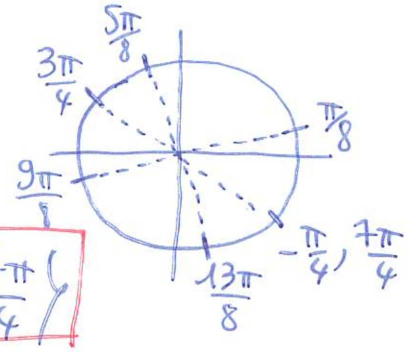
Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S_1=\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

2) Commençons par résoudre sur $\mathbb{R}$: pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\cos(3x)=\sin(x) \iff \cos(3x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$
$$\iff \exists k\in\mathbb{Z} : 3x=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi \text{ ou } 3x=x-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$
$$\iff \exists k\in\mathbb{Z} : x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \text{ ou } x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$$

Donc l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est

$S_2=\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$



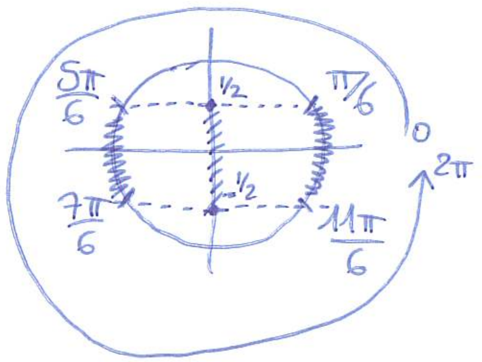
Ainsi l'ensemble des solutions sur $[0,2\pi[$ est

$$\boxed{S_2\cap[0,2\pi[=\left\{\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8},\frac{9\pi}{8},\frac{13\pi}{8},\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}}$$

3) Pour $x\in[0,2\pi[$ on a :

$$\sin^2(x)<\frac{1}{4} \iff -\sqrt{\frac{1}{4}}<\sin(x)<\sqrt{\frac{1}{4}} \iff -\frac{1}{2}<\sin(x)<\frac{1}{2}$$

D'après le dessin ci-contre, l'ensemble des solutions est



$$\boxed{S_3=\left[0,\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{11\pi}{6},2\pi\right[}$$

Exercice 4 :

1) Il s'agit de montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n + 5 \neq 0$ i.e. $u_n \neq -5$

Pour cela, montrons en fait par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2 > 0$ donc la propriété est vraie au rang 0.

Supposons que $u_n > 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors :

$4u_n + 2 > 2 > 0$ et $u_n + 5 > 5 > 0$

donc par quotient de quantités positives, on a $u_{n+1} = \dfrac{4u_n+2}{u_n+5} > 0$.

Ainsi par récurrence on a bien montré que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

et, a fortiori, la suite (u_n) est correctement définie.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ donc $u_n \neq -2$ donc $u_n + 2 \neq 0$.

Ainsi (v_n) est correctement définie.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\dfrac{4u_n+2}{u_n+5} - 1}{\dfrac{4u_n+2}{u_n+5} + 2} = \frac{4u_n + 2 - (u_n+5)}{4u_n + 2 + 2(u_n+5)}$$

$$= \frac{3u_n - 3}{6u_n + 12}$$

$$= \frac{u_n - 1}{2u_n + 4}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

$$= \frac{1}{2} v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\frac{1}{2^{n+2}}}$

4) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ donc $v_n(u_n + 2) = u_n - 1$

donc $u_n(v_n - 1) = -1 - 2v_n$

donc $u_n = \frac{-1-2v_n}{v_n - 1} = \frac{1+2v_n}{1-v_n}$

Ainsi, en utilisant la question 3) :

$$u_n = \frac{1 + 2 \times 2^{-n-2}}{1 - 2^{-n-2}} = \frac{1 + 2^{-n-1}}{1 - 2^{-n-2}} = \boxed{\frac{2^{n+2} + 2}{2^{n+2} - 1}}$$

Exercice 5 :

1) A la fin de l'étape i), le verre A contient $a'_n = \frac{1}{2} a_n$ litre de sirop et le verre B en contient $b'_n = b_n + a'_n$ litre.

A la fin de l'étape iii), le verre A contient donc

$a_{n+1} = a'_n + \frac{1}{3} b'_n$ litre de sirop,

et le verre B en contient $b_{n+1} = \frac{2}{3} b'_n$

En conséquence, on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{3}\left(b_n + \frac{1}{2} a_n\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) a_n + \frac{1}{3} b_n = \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n$$

et $b_{n+1} = \frac{2}{3}\left(b_n + \frac{1}{2} a_n\right) = \frac{2}{3} b_n + \frac{1}{3} a_n$

2) Aucune quantité de sirop n'est perdue au cours du protocole, donc la quantité totale du sirop $(a_n + b_n)$ est constante :

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n = a_0 + b_0 = 1 + 0 = 1.$

Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n = 1.$

Pour $n = 0$ on a bien $a_0 + b_0 = 1 + 0 = 1.$

Supposons que $a_n + b_n = 1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n + \frac{1}{3} a_n + \frac{2}{3} b_n = a_n + b_n = 1$$

Ainsi on a bien démontré que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n = 1.$

3) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n - \left(\frac{1}{3} a_n + \frac{2}{3} b_n\right)$$

$$= \frac{1}{3} a_n - \frac{1}{3} b_n$$

$$= \frac{1}{3}(a_n - b_n) = \frac{1}{3} u_n$$

Donc (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = a_0 - b_0 = 1 - 0 = 1$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n}$.

4) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} a_n + b_n = 1 & (L_1) \\ a_n - b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n & (L_2) \end{cases}$

En sommant les équations (L_1) et (L_2) on obtient donc

$$2a_n = a_n + b_n + a_n - b_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

donc $\boxed{a_n = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}$. Et dès lors :

$$b_n = 1 - a_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \boxed{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}.$$

5) Intuitivement, les transvasements successifs du protocole tendent à égaliser les quantités d'eau et de sirop dans les 2 verres, on devrait donc avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \boxed{\frac{1}{2}}$.

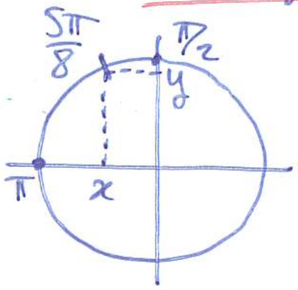
Et en effet, comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on a $\left(\frac{1}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc

$$a_n = \frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

et $b_n = \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$.

Exercice 6 :

1) On a $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{8} < \pi$ donc par lecture sur le cercle, on voit que $\boxed{y > 0}$ et $\boxed{x < 0}$.



2) On a : $x^2 - y^2 = \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)$

$$= \cos\left(2\times\frac{5\pi}{8}\right) \quad \text{(d'après la formule } \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta\text{)}$$

$$= \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3) On a : $x^2 + y^2 = \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \boxed{1}$ (d'après Pythagore)

4) On a donc montré que $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (L_1) \\ x^2 - y^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} & (L_2) \end{cases}$

En sommant (L_1) et (L_2) on obtient alors :

$$2x^2 = x^2+y^2+x^2-y^2 = 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{donc} \quad \boxed{x^2 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

En soustrayant (L_2) à (L_1) on obtient :

$$2y^2 = x^2+y^2-(x^2-y^2) = 1+\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{donc} \quad \boxed{y^2 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

Comme, d'après la question 1, $x<0$ et $y>0$, on en déduit que

$$x = -\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}} = \boxed{-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

5) On a : $\frac{x}{y} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = -\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}} = -\sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{4-2}} = \underline{-\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$

et un calcul similaire montre que $\frac{y}{x} = \underline{-\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$

Notons que $\frac{y}{x} = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)} = \tan\left(\frac{5\pi}{8}\right)$. et donc $\frac{x}{y} = \frac{1}{\tan\left(\frac{5\pi}{8}\right)}$

Ainsi on a $\tan\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ mais aussi :

$$-\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \frac{1}{\tan\left(\frac{5\pi}{8}\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{8}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right)$$

(en utilisant la formule $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$).

Dès lors, pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ on a :

$$\tan^4(t) - 6\tan^2(t) + 1 = 0 \iff \begin{cases} s = \tan^2(t) \\ s^2 - 6s + 1 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Le discriminant de X^2-6X+1 est $\Delta = (-6)^2-4 = 32 = 16\times 2$

donc ses racines sont

$$\frac{6+\sqrt{\Delta}}{2} = 3+\frac{\sqrt{16\times 2}}{2} = 3+2\sqrt{2}$$

et $\frac{6-\sqrt{\Delta}}{2} = 3-2\sqrt{2}$.

Ainsi : $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} s = \tan^2(t) \\ s = 3+2\sqrt{2} \text{ ou } s = 3-2\sqrt{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left(\tan^2(t) = 3+2\sqrt{2} \text{ ou } \tan^2(t) = 3-2\sqrt{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \tan(t) = \sqrt{3+2\sqrt{2}} \text{ ou } \tan(t) = -\sqrt{3+2\sqrt{2}} \\ \quad \text{ou } \tan(t) = \sqrt{3-2\sqrt{2}} \text{ ou } \tan(t) = -\sqrt{3-2\sqrt{2}} \end{array}\right) \quad (**)$$

On utilise alors : • que $-\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \tan\left(\frac{5\pi}{8}\right)$,

donc $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \tan\left(-\frac{5\pi}{8}\right)$. (car $\tan(-\theta) = -\tan\theta$)

• et que $-\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ donc $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

On arrive alors à

$$(**) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \tan(t) = \tan\left(-\frac{5\pi}{8}\right) \text{ ou } \tan(t) = \tan\left(\frac{5\pi}{8}\right) \\ \quad \text{ou } \tan(t) = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \text{ ou } \tan(t) = \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \exists k \in \mathbb{Z} : t = -\frac{5\pi}{8} + k\pi \text{ ou } t = \frac{5\pi}{8} + k\pi \\ \quad \text{ou } t = \frac{\pi}{8} + k\pi \text{ ou } t = \frac{-\pi}{8} + k\pi \end{array}\right)$$

En conclusion, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{S = \left\{ \frac{\pi}{8} + k\pi, -\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{5\pi}{8} + k\pi, -\frac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right.}$$

Rqes : aux questions 4 des exos 5 et 6, on a utilisé une combinaison des lignes (L_1) et (L_2) pour éliminer une variable. On pouvait bien sûr procéder aussi par substitution (c'est-à-dire en exprimant une des 2 variables en fonction de l'autre).