

# Programme de colles : semaine 5, du 14/10 au 18/10

*Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.*

## 1 Logique

- récurrence simple
- récurrence double, récurrence forte. *Un seul exemple de récurrence forte a été abordé en classe.*

## 2 Suites usuelles

- suites arithmétiques, géométriques, limites de telles suites. *La formule générale pour la somme des termes successifs de telles suites (i.e. “de  $p$  à  $n$ ”) n’a pas été donnée.*
- suites arithmético-géométriques. *La méthode de détermination du terme générale doit être connue.*
- suites récurrentes linéaires d’ordre 2. ***Attention :** le cas où le discriminant du polynôme caractéristique est strictement négatif ne fait pas partie du programme de colle.*
- exemples d’utilisation de suites auxiliaires pour se ramener à des suites usuelles

## 3 Exponentielles et logarithmes

*Les résolutions d’équations et d’inéquations avec des exponentielles et des logarithmes n’ont pas été abordées en classe.*

- règles de calculs. *Ces règles sont admises. On utilise la notation  $\exp(x) = e^x$  même si la définition de  $a^b$  pour  $b \notin \mathbb{Q}$  n’a pas été donnée en classe et sera vue ultérieurement.*

## 4 Études de fonctions

***Attention, début de chapitre uniquement :** l’étude des fonctions à proprement parler n’a pas été commencée en classe. On se concentre pour cette semaine sur les calculs d’ensembles de définition et de dérivabilité, de composée. Les calculs de dérivée et les propriétés des fonctions usuelles seront vus la semaine prochaine.*

- ensemble de définition et d’arrivée, vocabulaire
- savoir déterminer l’ensemble de définition et de dérivabilité d’une fonction donnée
- opérations, composition
- fonctions monotones, strictement monotones (*définition uniquement*)

## 5 Informatique en langage Python

*L’import de bibliothèque n’a pas été vu en classe. En particulier, on écrira les racines carrées avec des puissances  $1/2$ .*

- fonction `print`. *On déconseille aux élèves d’utiliser `print` à l’intérieur des fonctions.*
- boucle `for` : fonction `range`, calculs de sommes et de produits, suites récurrentes définies par une relation du type  $u_{n+1} = f(u_n)$ . ou  $u_{n+1} = f(u_n, n)$  ou  $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$ . *On attend des élèves qu’ils sachent réaliser le “suivi des variables” dans la boucle pour décider des bornes du `range`.*

## 6 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Donner la définition d'une suite arithmétique (ou géométrique)  $(u_n)_{n \geq 0}$ , puis donner et démontrer la formule donnant l'expression de  $u_n$  en fonction de  $u_0$  et de  $n$ .
2. Donner l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  si  $(u_n)$  est une suite arithmético-géométrique choisie par l'examinateur.
3. Donner la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$  en fonction de  $q \in \mathbb{R}$  et illustrer chacun des quatre cas  $q > 1$ ,  $0 < q < 1$ ,  $-1 < q < 0$  et  $q < -1$  par un schéma.
4. Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 5$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ . Démontrer par récurrence double que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2^n + 3^n$ .
5. Déterminer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  où  $(u_n)$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 choisie par l'examinateur. *Note aux colleurs : attention, cas  $\Delta \geq 0$  uniquement.*
6. Si  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ , donner la définition de  $f \circ g$ . On précisera son ensemble de définition en fonction de  $D_f$  et  $D_g$ . Calculer  $f \circ g$  et  $g \circ f$  pour deux fonctions  $f$  et  $g$  simples choisies par l'examinateur.
7. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Donner la définition de  $f$  est (strictement) (dé)croissante sur  $I$ .
8. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à la fois croissante et décroissante sur  $I$ . Démontrer que  $f$  est constante sur  $I$ .
9. Écrire une fonction Python `somme` (resp. `produit`) prenant en argument un entier  $n$  et renvoyant  $\sum_{k=5}^n \frac{\sqrt{k}}{k+1}$  (resp.  $\prod_{k=2}^n \frac{1+k}{2}$ ) ou de toute autre somme ou produit simple choisi par l'examinateur.
10. Écrire une fonction Python `suite` prenant en argument un entier  $n$  et renvoyant  $u_n$  où la suite  $(u_n)$  est définie par une relation de récurrence du type  $u_{n+1} = f(u_n)$ ,  $u_n = f(u_{n-1})$ ,  $u_{n+1} = f(u_n, n)$  ou  $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$ .

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type remédiation" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiation 4, tous les exos : <https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=5313>

La question de cours est noté sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.