Feuille de cours 4.1 : parité, périodicité

On considère des fonctions définies sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le *graphe* de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ suivant : $\{(x, f(x)),\ x \in D\}$.

On s'intéresse aux liens entre le graphe de f et deux propriétés de f : la parité et la périodicité.

1 Symétries et parité

1.1 Fonctions paires

Définition 1
Un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ est dit symétrique par rapport à 0 lorsque : $\forall x \in D,\ -x \in D$.

Par exemple, $[-2, 2]$ et $\mathbb{R}^*$ sont symétriques par rapport à 0 ; mais $]-3, 3]$ et $\mathbb{R}^+$ ne le sont pas.

Définition 2
Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite paire lorsque :

- D est symétrique par rapport à 0, et
- $\forall x \in D,\ f(-x) = f(x)$

Remarque 3
Attention, lorsqu'on vous demande la définition de "f est paire" ne répondez pas simplement "$f(-x) = f(x)$" : il faut quantifier la variable x (à défaut, on pourra vous demander "pour quel x ?") et préciser que l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 (pour que l'expression $f(-x)$ ait bien un sens pour tout $x \in D$).

Par exemple la fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$ par $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est paire car :

Exercice 1
Les fonctions suivantes sont-elles paires ?

1. $\begin{array}{cccc} f_1 & : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & : & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

2. $\begin{array}{cccc} f_2 & : & \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & : & x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+x} - \dfrac{x}{1-x} \end{array}$

Interprétation graphique : Une fonction f est paire lorsque son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

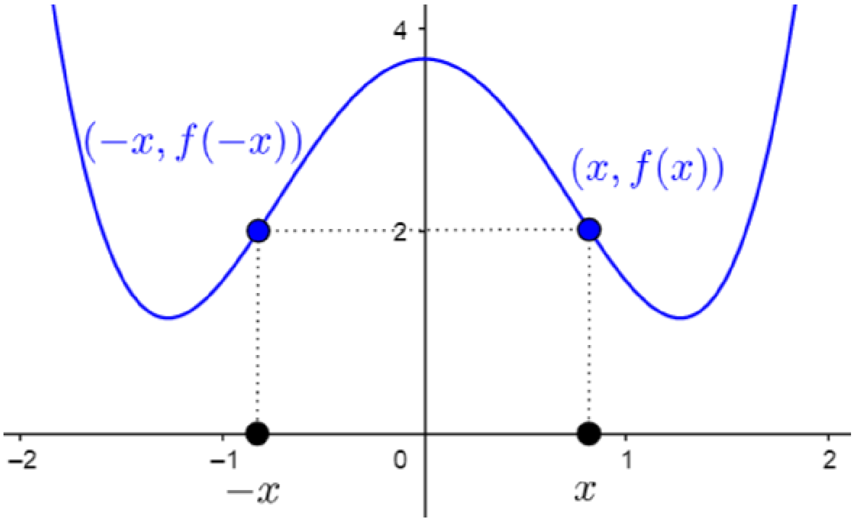

Figure 1 – Graphe d'une fonction paire (repérez que $f(-x) = f(x)$)

1.2 Fonctions impaires

Définition 4
Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite impaire lorsque :

- D est symétrique par rapport à 0, et
- $\forall x \in D,\ f(-x) = -f(x)$.

Remarque 5
La remarque 3 s'applique également ici.

Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto e^x - e^{-x}$ est impaire puisque :

Proposition 6
Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction impaire et si $0 \in D$ alors $f(0) = 0$.

Démonstration :

Proposition 7
La fonction nulle est la seule fonction à la fois paire et impaire.

Démonstration :

Interprétation graphique : Une fonction f est impaire lorsque son graphe est symétrique par rapport à l'origine O.

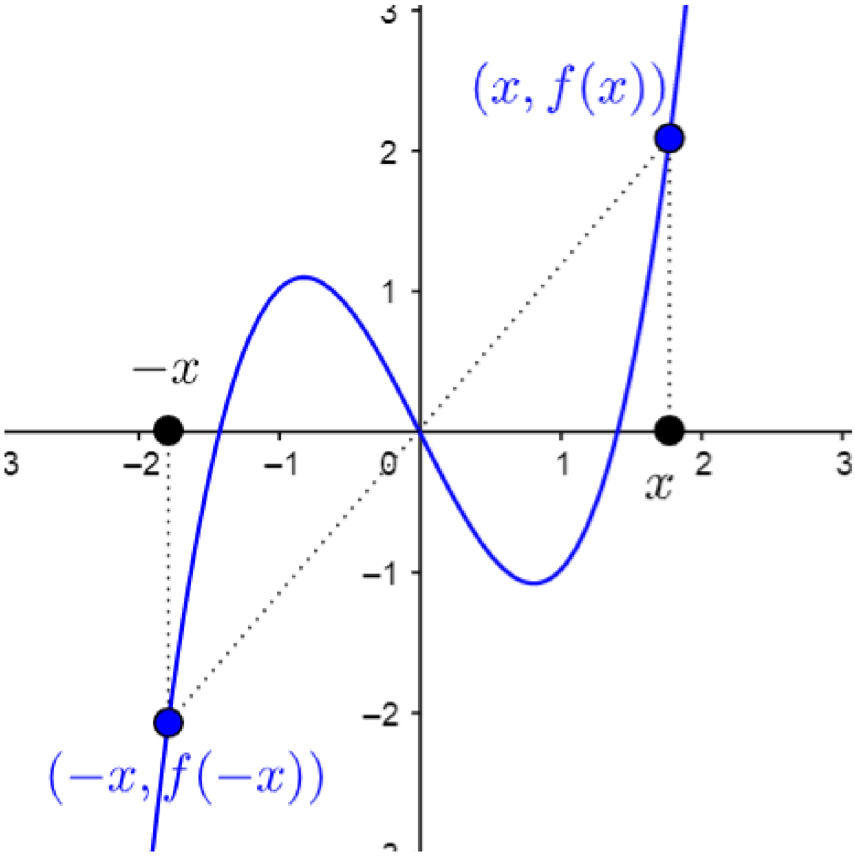

FIGURE 2 – Graphe d'une fonction impaire (repérez que $f(-x) = -f(x)$)

Exercice 2
Tracer les graphes de $f_1 : x \longmapsto x$, $f_2 : x \longmapsto x^2$ et $f_3 : x \longmapsto x^3$. Quelles fonctions sont paires ? impaires ?

Exemple fondamental : L'exemple précédent explique la terminologie choisie : pour tout $n \in \mathbb{Z}$ notons $f_n : x \longmapsto x^n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ et sur $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$. Alors :

- la fonction f_n est paire lorsque
- la fonction f_n est impaire lorsque

2 Translations et périodicité

2.1 Périodicité

Définition 8

Soit $T \in \mathbb{R}$. Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite T-périodique lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x).$$

Interprétation graphique : Une fonction f est T-périodique lorsque le graphe de f est stable par translation horizontale de longueur T.

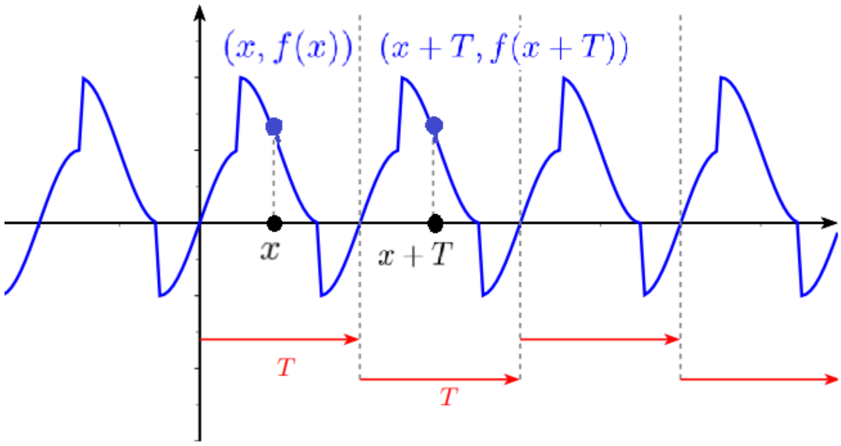

FIGURE 3 – Graphe d'une fonction périodique (repérez que $f(x+T) = f(x)$)

Par exemple, les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques car :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x+2\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x+2\pi) = \sin(x).$$

Remarque 9

Pour simplifier on a seulement donné ici la définition dans le cas où l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$. Toutefois on pourra être amené à considérer des fonctions périodiques dont l'ensemble de définition n'est pas $\mathbb{R}$ tout entier, comme par exemple la fonction tangente qui est π-périodique et définie seulement sur $D_{\tan} = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Il faut alors ajouter une condition sur l'ensemble de définition : une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite T-périodique lorsque :

- $\forall x \in D,\ x+T \in D$, et
- $\forall x \in D,\ f(x+T) = f(x)$.

Par exemple pour la fonction tangente on a bien pour tout $x \in D_{\tan},\ x+\pi \in D_{\tan}$.

Exercice 3

Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \cos(2x+5)$ est π-périodique.

La période d'une fonction périodique n'est pas unique. On essaiera toujours de donner *la plus petite période possible.*

Proposition 10
Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction T-périodique alors f est aussi kT-périodique pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration :
Le cas $k = 0$ ne nécessite même pas d'utiliser l'hypothèse : toutes les fonctions sont 0-périodiques. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on procède par récurrence : l'initialisation à $k = 1$ est donnée par l'hypothèse. Pour l'hérédité : supposons que f soit kT-périodique pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$ et fixons $x \in D$. Puisque f est T-périodique et kT-périodique on a :

$$f(x + (k+1)T) = f((x + kT) + T) = f(x + kT) = f(x)$$

Ainsi f est $(k+1)T$-périodique, ce qu'il fallait démontrer.
Par ailleurs, si f est T-périodique alors elle est aussi $(-T)$-périodique. En effet, pour tout $x \in D$ on a :

$$f(x) = f((x - T) + T) = f(x - T).$$

Un raisonnement par récurrence montre alors que f est $(-kT)$-périodique pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. $\square$

Exercice 4
Déterminer la plus petite période de $f : x \longmapsto \cos(8\pi x)$.