Feuille de cours 4.2 : calculs de dérivées

1 Dérivées des fonctions usuelles

Pour chacune des fonctions $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes, on rappelle son ensemble de dérivabilité $\mathcal{D}'_f$ et l'expression de sa dérivée f' :

$f(x)$	$\mathcal{D}_f$	$\mathcal{D}'_f$	$f'(x)$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$n\ x^{n-1}$
x^n $(n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N})$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$n\ x^{n-1}$
x^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_*^+$	$\mathbb{R}_*^+$	$\alpha\ x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}_*^+$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\mathbb{R}_*^+$	$\mathbb{R}_*^+$	$\dfrac{1}{x}$
$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\exp(x)$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\tan x$	$\mathbb{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$1+\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

Exemples :

- Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^4}$. Comme $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = x^{-4}$, la dérivée de f est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = -4x^{-4-1} = -\dfrac{4}{x^5}$.
- Soit $g : x \longmapsto x^\pi$. La dérivée de g est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ g'(x) = \pi x^{\pi-1}$.

2 Opérations

Proposition 1
Soient $f, g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions numériques dérivables sur $\mathcal{D}$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

1. $f + g$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et $(f+g)' = f' + g'$.
2. λf est dérivable sur $\mathcal{D}$ et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
3. fg est dérivable sur $\mathcal{D}$ et $(fg)' = f'g + g'f$.
4. Si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$ alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables sur $\mathcal{D}$ et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$.

Exemples :

- Soit $h : x \longmapsto \sqrt{x}\cos(x)$. En notant $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ et $g : x \longmapsto \cos(x)$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ h'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(x) - \sin(x)\sqrt{x}.$$

- Soit $k : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}}{\cos(x)}$. En notant $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ et $g : x \longmapsto \cos(x)$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(x) - (-\sin(x)\sqrt{x})}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x) + 2x\sin(x)}{2\sqrt{x}\cos^2(x)}.$$

Exercice 1
Dérivez les fonctions suivantes (on ne s'intéressera pas aux ensembles de dérivabilité).

1. $u_1 : x \longmapsto 3e^x - \sqrt{x}$
2. $u_2 : x \longmapsto \dfrac{1}{x^3} + 2\arctan(x) + 1$
3. $u_3 : x \longmapsto x^2\cos(x)$
4. $u_4 : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{e^x}$

3 Dérivées des composées usuelles

Soit $u : \mathcal{D}_u \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique dérivable sur $\mathcal{D}_u$. Pour chacune des fonctions composées suivantes, on donne l'équation à résoudre pour connaître son ensemble de définition $\mathcal{D}$, son ensemble de dérivabilité $\mathcal{D}'$, et on donne sa dérivée :

composée	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}'$	dérivée
$(u(x))^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$\mathcal{D}_u$	$\mathcal{D}_u$	$n\ u'(x)\ (u(x))^{n-1}$
$(u(x))^n$ $(n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N})$	$u \neq 0$	$u \neq 0$	$n\ u'(x)\ (u(x))^{n-1}$
$(u(x))^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$	$u > 0$	$u > 0$	$\alpha\ u'(x)\ (u(x))^{\alpha-1}$
$\dfrac{1}{u(x)}$	$u \neq 0$	$u \neq 0$	$-\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$
$\sqrt{u(x)}$	$u \geq 0$	$u > 0$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\ln(u(x))$	$u > 0$	$u > 0$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$\exp(u(x))$	$\mathcal{D}_u$	$\mathcal{D}_u$	$u'(x)\ \exp(u(x))$
$\sin(u(x))$	$\mathcal{D}_u$	$\mathcal{D}_u$	$u'(x)\ \cos(u(x))$
$\cos(u(x))$	$\mathcal{D}_u$	$\mathcal{D}_u$	$-u'(x)\ \sin(u(x))$
$\tan(u(x))$	$u \notin \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$u \notin \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$u'(x)\,(1+\tan^2(u(x))) = \dfrac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$
$\arctan(u(x))$	$\mathcal{D}_u$	$\mathcal{D}_u$	$\dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$

D'où viennent toutes ces formules et comment les retrouver rapidement ? Grâce à la proposition suivante :

Proposition 2
Soient $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions numériques telles que $g(\mathcal{D}_g) \subset \mathcal{D}_f$. Si f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et g sur $\mathcal{D}_g$ alors $f \circ g$ est dérivable sur $\mathcal{D}_g$ et

$$(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g).$$

En particulier, si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable alors pour $a, b \in \mathbb{R}$ fixés, la fonction $h : x \longmapsto f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = a\, f'(ax+b)$$

Exemples :

- Soit $f : x \longmapsto \cos(\pi x - 4)$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \pi \cos'(\pi x - 4) = -\pi \sin(\pi x - 4).$$

- Soit $g : x \longmapsto e^{\sin(x)}$ alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \sin'(x) \exp'(\sin(x)) = \cos(x) e^{\sin(x)}.$$

- Soit $h : x \longmapsto \arctan^5(x)$ alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = 5 \arctan'(x)(\arctan(x))^4 = \frac{5(\arctan(x))^4}{1+x^2}.$$

- Soit $k : x \longmapsto \ln(x^2+1)$. Comme la dérivée de $x \longmapsto x^2+1$ est $x \longmapsto 2x$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ k'(x) = 2x \times \ln'(x^2+1) = \frac{2x}{x^2+1}$$

Exercice 2
Dérivez les fonctions suivantes (on ne s'intéressera pas aux ensembles de dérivabilité).

1. $f_1 : x \longmapsto e^{-5x+2}$
2. $f_2 : x \longmapsto \dfrac{2x-1}{-x+2}$
3. $f_3 : x \longmapsto \sin^3(x)$
4. $f_4 : x \longmapsto \ln(\cos(x))$
5. $f_5 : x \longmapsto \ln(1+e^x)$
6. $f_6 : x \longmapsto e^{2x} \tan(4x)$
7. $f_7 : x \longmapsto \sqrt{2-x}$
8. $f_8 : x \longmapsto (x^2+x+1)^\pi$
9. $f_9 : x \longmapsto e^{\cos(\cos(x))}$

Exercice 3
Dérivez les fonctions suivantes (on ne s'intéressera pas aux ensembles de dérivabilité).

1. $g_1 : x \longmapsto \dfrac{3}{x^4}$
2. $g_2 : x \longmapsto \dfrac{e^x}{x^2}$
3. $g_3 : x \longmapsto x^2 \cos(x)$
4. $g_4 : x \longmapsto \ln(2x) - e^{-x}$
5. $g_5 : x \longmapsto \ln(\ln(x))$
6. $g_6 : x \longmapsto \dfrac{-x^2+1}{2x-4}$
7. $g_7 : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{-x^2+1}{2x-4}\right)$
8. $g_8 : x \longmapsto \dfrac{\cos(x)e^x}{x^2}$
9. $g_9 : x \longmapsto \cos(\sin(\cos(x)))$