NOM :

PRENOM :

Bonus/malus de participation :

Question 1 (/1,5pt). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Donner la définition de : "f est croissante sur I".

$\forall x, y \in I, \ (x \geqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y))$

Question 2 (/1,5pt). Vrai ou Faux ? Écrire lisiblement "vrai" ou "faux" à côté de chaque égalité. On ne demande pas de justifier. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_*^+$:

- $\ln(\frac{1}{a^2}) = -2\ln(a)$ Vrai
- $\frac{\ln(a)}{\ln(b)} = \ln(a-b)$ Faux
- $(e^{a-b})^2 = (e^{b-a})^2$ Faux

Question 3 (/3pts). Simplifier (on ne demande pas de préciser pour quelles valeurs de x, y, z cela a un sens) :

$$\ln\left(\frac{x^3y}{z^2}\right) - \ln(x^2y) + 2\ln\left(\frac{z}{y}\right) = \ln(x^3) + \ln(y) - \ln(z^2) - (\ln(x^2) + \ln(y)) + 2(\ln(z) - \ln(y))$$

$$= 3\ln(x) + \ln(y) - 2\ln(z) - 2\ln(x) - \ln(y) + 2\ln(z) - 2\ln(y)$$

$$= \ln(x) - 2\ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y^2}\right)$$

$$\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} + \frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{e^x(e^{-x}-1)}{e^x(e^{-x}+1)} + \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

$$= \frac{1-e^x}{1+e^x} + \frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{1-e^x+e^x-1}{1+e^x} = 0$$

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e^{-x}}}\right) = -\ln(\sqrt{e^{-x}}) = -\frac{1}{2}\ln(e^{-x}) = \frac{x}{2}$$

Question 4 (/4pts). Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -3u_{n+1} + 4u_n$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le polynôme caractéristique est $P(X) = X^2 + 3X - 4 = (X+4)(X-1)$ donc ses racines sont -4 et 1. Ainsi on sait qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \lambda(-4)^n + \mu 1^n = \lambda(-4)^n + \mu$.

On détermine λ et μ en résolvant :

$$\begin{cases} \lambda(-4)^0 + \mu = u_0 = 3 \\ \lambda(-4)^1 + \mu = u_1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ -4\lambda + \mu = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 3 - \lambda \\ -4\lambda + 3 - \lambda = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 3 - \lambda \\ -5\lambda = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = (-4)^n + 2$

BCPST 1B **Interro 6 (sujet B) :** **/10 pts** **2024-2025**

NOM :

PRENOM :

Bonus/malus de participation :

Question 1 (/1,5pt). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Donner la définition de : "f est décroissante sur I".

$\forall\, x, y \in I,\ (x \geq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$

Question 2 (/1,5pt). Vrai ou Faux ? Écrire lisiblement "vrai" ou "faux" à côté de chaque égalité. On ne demande pas de justifier. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_*^+$:

- $(\ln(a))^2 = \ln(2a)$ Faux
- $\dfrac{e^{2a}}{e^{-2b}} = (e^{a+b})^2$ Vrai
- $\exp(-2\ln(a^3)) = -6a$ Faux

Question 3 (/3pts). Simplifier (on ne demande pas de préciser pour quelles valeurs de x, y, z cela a un sens) :

$$\ln\left(\frac{y^3 z}{x^2}\right) - \ln(y^2 z) + 2\ln\left(\frac{x}{z}\right) = \ln(y^3) + \ln(z) - \ln(x^2) - (\ln(y^2) + \ln(z)) + 2(\ln(x) - \ln(z))$$
$$= 3\ln(y) + \ln(z) - 2\ln(x) - 2\ln(y) - \ln(z) + 2\ln(x) - 2\ln(z)$$
$$= \ln(y) - 2\ln(z) = \ln\left(\frac{y}{z^2}\right)$$

$$\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1} + \frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{e^x(e^{-x}+1)}{e^x(e^{-x}-1)} + \frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{1+e^x}{1-e^x} + \frac{e^x+1}{e^x-1}$$
$$= \frac{1+e^x}{1-e^x} - \frac{e^x+1}{1-e^x} = 0$$

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e^{-x}}}\right) = -\ln\left(\sqrt{e^{-x}}\right) = -\frac{1}{2}\ln(e^{-x}) = \frac{x}{2}$$

Question 4 (/4pts). Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3,\ u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le polynôme caractéristique est $P(X) = X^2 + 2X - 3 = (X+3)(X-1)$ donc ses racines sont -3 et 1. Ainsi on sait qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda(-3)^n + \mu 1^n = \lambda(-3)^n + \mu.$

On détermine λ et μ en résolvant :

$$\begin{cases} \lambda(-3)^0 + \mu = u_0 = 3 \\ \lambda(-3)^1 + \mu = u_1 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ -3\lambda + \mu = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 3 - \lambda \\ -3\lambda + 3 - \lambda = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu = 3 - \lambda \\ -4\lambda = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 2 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-3)^n + 2$