Révisions TP6

Exercice 1 Pour démarrer

Q1 Écrire une fonction prenant en argument $n \in \mathbb{N}$ et renvoyant $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2+1}{k^3+1}$.

Q2 Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = n + \dfrac{1}{u_n}$. Écrire une fonction prenant en argument n et renvoyant u_n.

Q3 Soit (v_n) la suite définie par : $v_0 = v_1 = v_2 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+3} = 3v_{n+2} - 2v_{n+1} + 5v_n$. Écrire une fonction prenant en argument n et renvoyant v_n.

Exercice 2 Évolution d'une population de bactéries

On cultive des bactéries en laboratoire et on sait que chaque jour le nombre de bactéries augmente de $\tau\,\%$ où τ est un nombre réel fixé. On appelle B_0 le nombre de bactéries au début de l'expérience, et B_n le nombre de bactéries après n jours.

Q1 (Sans ordinateur). Écrire la relation entre B_n, B_{n+1} et τ.

Q2 Écrire une fonction `population` prenant en arguments le nombre initial de bactéries, le taux de croissance τ, et le nombre `n` d'années considérées. Cette fonction renverra le nombre de bactéries après `n` jours.

Q3 Vérifier que pour une population initiale de 425 bactéries et une croissance de 1.94% par jour, on compte 756 bactéries après 30 jours.

Exercice 3 Suite et somme

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} + 1$.

Q1 Écrire une fonction `suite` qui prend en argument un entier naturel `n` et qui renvoie la valeur de u_{n}. (Tester votre fonction sur de petites valeurs de `n`).

Q2 En déduire une fonction `somme`, <u>utilisant la fonction `suite`</u>, qui prend en argument un entier naturel `n` et qui renvoie la valeur de $\sum_{k=0}^{\mathrm{n}} u_k$. (Tester votre fonction sur de petites valeurs de `n`).

Q3 Combien de fois Python calcule-t-il la valeur de u_1 pour évaluer `somme(5)` ?

Q4 Écrire une fonction `somme_bis` qui renvoie le même résultat que `somme` mais sans le défaut évoqué à la question précédente.

Q5 La fonction `somme_bis` devrait être plus "efficace" que la fonction `somme`. Pour le constater, on peut chronométrer le temps que met Python à faire un calcul. Pour chronométrer le temps d'exécution d'une commande on utilisera la syntaxe suivante :

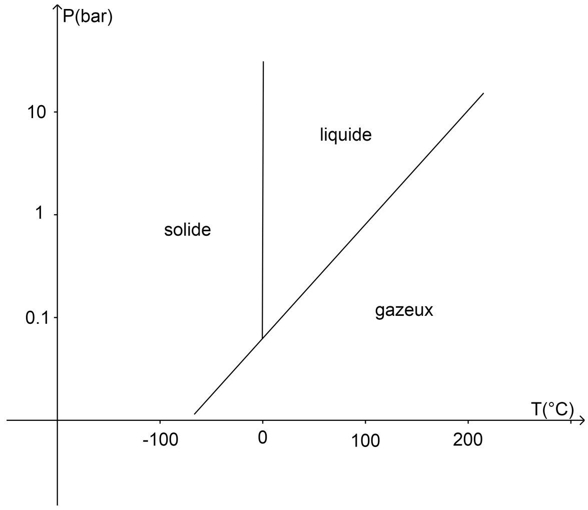
```python
import time # À positionner en début de script (une seule fois)
T0 = time.time() # stocke dans T0 l'heure de début du calcul
# compléter cette ligne avec le calcul à effectuer
T1 = time.time() # stocke dans T1 l'heure de fin du calcul
print(T1-T0) # affiche la durée du calcul
```

Constater que `somme_bis` est plus rapide que `somme` sur le calcul de u_{100} ou u_{1000}.

Exercice 4 Diagramme de l'eau simplifié

Q1 Écrire une fonction `etat1` prenant en argument un réel `T` correspondant à la température en degrés Celsius d'un volume d'eau dans des conditions habituelles de pression, et renvoyant son état (solide, liquide ou gazeux).

De manière plus générale, l'eau pure se présente sous 3 phases (solide, liquide ou gazeuse) en fonction des conditions de température et de pression. La phase (ou le mélange de plusieurs phases) correspondant à une température `T` et une pression `P` est donnée par le diagramme de phase de l'eau pure dont une version simplifiée est donnée ci-contre.



Sur ce diagramme, où l'axe de la pression est en échelle logarithmique, la courbe de fusion (passage de l'état solide à l'état liquide) est modélisée par la droite d'équation $\mathtt{T} = 0$, et les courbes de vaporisation et de sublimation (passage de l'état liquide ou solide à l'état gazeux) sont modélisées par la droite d'équation $\log_{10}(\frac{\mathtt{P}}{\mathtt{P}^\circ}) = \frac{1}{50}\mathtt{T} - 2$ avec $\mathtt{P}^\circ = 1,0$ bar.

On rappelle que pour $x > 0$ on définit : $\log_{10}(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

> **Remarque**
>
> Pour la deuxième question de cet exercice, vous utiliserez la fonction logarithme. Celle-ci n'est pas directement disponible dans Python : il faut la charger en "important un paquet". Par exemple le paquet `numpy` qui contient plusieurs fonctions mathématiques. Voici comment procéder :
>
> ```python
> import numpy as np # À positionner au début du programme
> x = np.log(7) # cette commande affecte à x la valeur ln(7)
> ```
>
> Signalons que Python utilise la notation anglo-saxonne "log" pour désigner la fonction logarithme népérien "ln".

Q2 Écrire une fonction `etat2` prenant en argument deux réels `T` et `P` correspondant à la température en degrés Celsius et à la pression en bar d'un volume d'eau et renvoyant son état. Vérifiez en particulier que `etat2(T,1) = etat1(T)`. Comment cette relation se lit-elle sur le diagramme de l'eau ?