Exercice 1
Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes :

1. (a) $f_a : x \longmapsto \sqrt{2x+4} - \dfrac{1}{x-3}$
   (b) $f_b : x \longmapsto \ln(x^2 - 2x + 5)$
   (c) $f_c : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x+1}{3-x}\right)$
   (d) $f_d : x \longmapsto \sqrt{e^{4x} - 2e^{2x} - 1}$

2. (a) $f_a : x \longmapsto \sqrt{5-x^2}$
   (b) $f_b : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{3-x}}{x^2-1}$
   (c) $f_c : x \longmapsto \sqrt{\ln(x)}$
   (d) $f_d : x \longmapsto \dfrac{\ln(\ln(x))}{e^x - e^4}$

Exercice 2
On considère les fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} D_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} D_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \end{array}$$

1. Déterminer leurs ensembles de définition D_f et D_g.
2. Les fonctions f et g sont-elles paires ? impaires ?
3. Vérifier vos réponses en traçant les graphes de f et de g sur Geogebra : `https://www.geogebra.org/classic?lang=fr`

Exercice 3
On souhaite faire l'étude de la fonction $f : x \longmapsto e^{\cos(x)}$.

1. Expliquer pourquoi il est suffisant d'étudier f sur $[0, \pi]$ et expliquer comment obtenir le graphe de f sur $\mathbb{R}$ à partir de celui sur $[0, \pi]$.
2. Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$. Préciser ensuite les limites et les tangentes de f en 0 et en π.
3. Tracer l'allure du graphe de f puis vérifier votre résultat sur Geogebra : `https://www.geogebra.org/classic?lang=fr`

Exercice 4
Faire l'étude des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \ln(-2x^2 + x + 1)$. *On rappelle que* $\lim\limits_{y \to 0} \ln(y) = ...$
2. $g : x \longmapsto \dfrac{x^3 - 2x}{3 - x^2}$
3. $h : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{2 - e^x}{e^{2x} - 9}}$
4. $f : x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
   Pour la limite de f en $+\infty$, on écrira $f(x) = \dfrac{1 - e^{ax}}{1 + e^{ax}}$ *pour un nombre a à déterminer.*
5. $g : x \longmapsto \sqrt{-x^4 + x^2 + 6}$

Exercice 5
On considère la fonction $f : x \longmapsto \cos(3x)\cos^3(x)$.

1. Montrer que f est paire et π-périodique. Sur quel intervalle I peut-on se contenter d'étudier f ?
2. Montrer que pour $x \in I$, $f'(x)$ est du signe de $-\sin(4x)$.
3. En déduire le signe de f' sur I et dresser le tableau de variations de f sur I.
4. Tracer le graphe de f sur son ensemble de définition.

Exercice 6
Montrer par étude de fonction que :

1. $\forall x > 0,\ \arctan(x) \geq \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$
2. $\forall x \geq 0,\ \sqrt{1+x} \geq 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$

Exercice 7
Les deux questions de cet exercice sont indépendantes. On vérifiera ses résultats (sans tricher !) en traçant les graphes des fonctions en jeu sur Geogebra : ***https://www.geogebra.org/classic?lang=fr****.*

1. Étudier la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{2\cos(x) - 1}$.
2. Montrer par étude de fonction que : $\forall x > 0,\ x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

Exercice 8
Dans cet exercice, on démande de démontrer les résultats en revenant à la définition de la partie entière (qu'il faut donc connaître !).

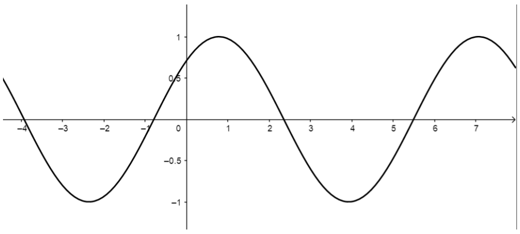
1. Déterminer la partie entière de $\sqrt{33}$.
2. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.

Exercice 9

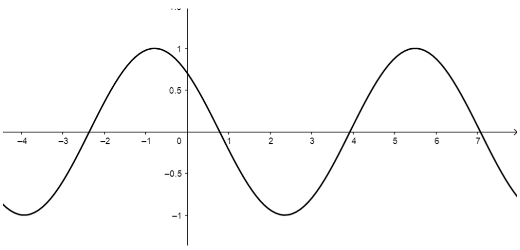
1. Dans cette question, on cherche à montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$.
   (a) Vérifier que cette formule est vraie pour $x = 3{,}2$ puis pour $x = 3{,}8$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on écrit : $x = \lfloor x \rfloor + t$ avec $t \in [0, 1[$. Exprimer $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$. On distinguera deux cas en fonction de la valeur de t.
   (c) Dans chacun des cas précédents, exprimer $\lfloor 2x \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.
   (d) Conclure.
2. En suivant une méthode similaire à celle de la première question, montrer que :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{3} \rfloor + \lfloor x + \frac{2}{3} \rfloor$

Exercice 10
Associez chaque fonction à son graphe. Justifiez votre réponse en identifiant des propriétés satisfaites par les fonctions proposées et les manifestations de ces propriétés sur leurs graphes.

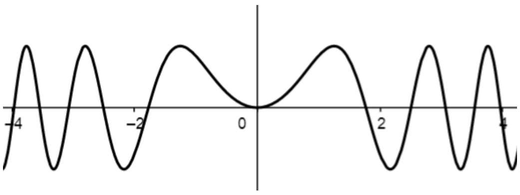
1. $x \longmapsto (x-1)^2+1$
2. $x \longmapsto (x+1)^2-1$
3. $x \longmapsto \cos(x+\dfrac{\pi}{4})$
4. $x \longmapsto \cos(x-\dfrac{\pi}{4})$
5. $x \longmapsto \sin(x^2)$
6. $x \longmapsto \sin(x^3)$
7. $x \longmapsto \ln(x)+1$
8. $x \longmapsto \sqrt{x}$



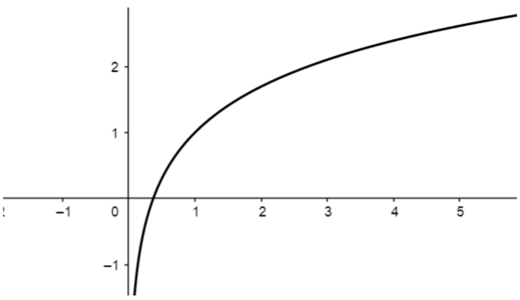
(a)



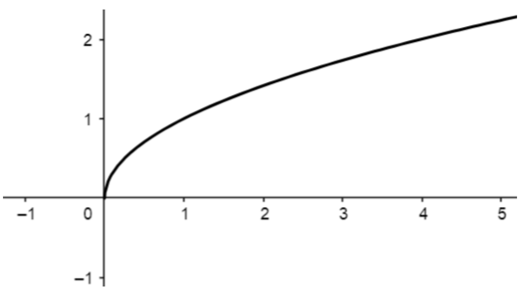
(b)



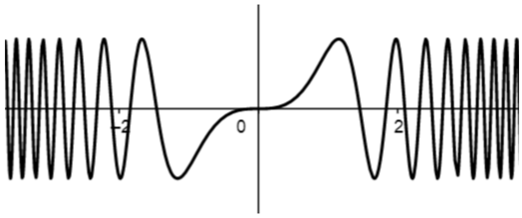
(c)



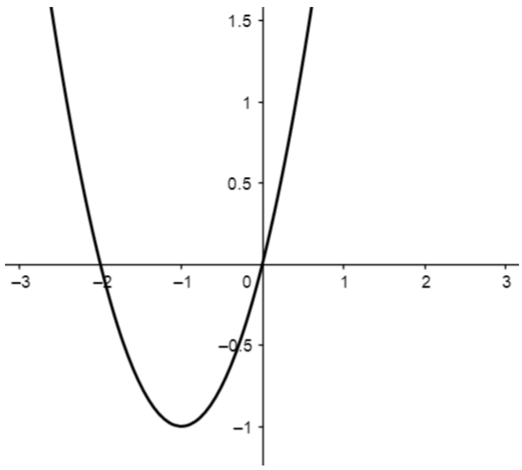
(d)



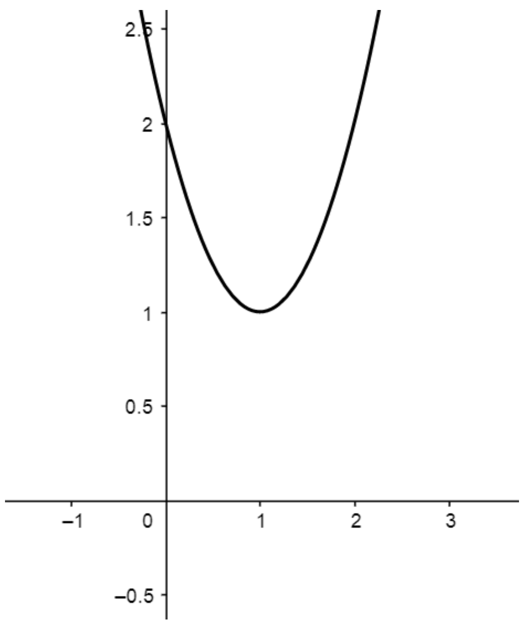
(e)



(f)



(g)



(h)