1) a) On reconnaît des suites géométriques donc :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = x_0 a^n$ et $y_n = y_0 a^n$.

b) Comme $a > 0$ et $x_0 > 0$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ x_0 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } a < 1 \end{cases}$$

donc la population X survit à condition que $a \geqslant 1$.

2) a)

```
def popu(x0, y0, a, b, n):
    x, y = x0, y0
    for k in range(n):
        x, y = a*x - b*y, a*y
    return x, y
```

b) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$x_{n+2} = a x_{n+1} - b y_{n+1}$. Or $y_{n+1} = a y_n$. Donc $x_{n+2} = a x_{n+1} - ab y_n$.

Mais $x_{n+1} = a x_n - b y_n$ donc $-ab y_n = a(x_{n+1} - a x_n) = a x_{n+1} - a^2 x_n$.

Finalement,
$$\begin{aligned} x_{n+2} &= a x_{n+1} - ab y_n \\ &= a x_{n+1} + a x_{n+1} - a^2 x_n \\ &= 2a x_{n+1} - a^2 x_n . \end{aligned}$$

c) Le polynôme caractéristique associé à cette relation de récurrence linéaire d'ordre 2 est $P(X) = X^2 - 2aX + a^2 = (X-a)^2$.
Il n'a qu'une seule racine (a), donc on sait que :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, \ x_n = \lambda a^n + \mu n a^n$$

On détermine alors λ et μ en utilisant les valeurs de x_0 et de $x_1 = a x_0 - b y_0$:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda \times a^0 + \mu \times 0 \times a^0 = \lambda \\ a x_0 - b y_0 = \lambda a + \mu a \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = x_0 \\ a x_0 - b y_0 = a x_0 + \mu a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = x_0 \\ \mu a = -b y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = x_0 \\ \mu = -\frac{b}{a} y_0 \end{cases}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = x_0 a^n - \frac{b}{a} y_0 n a^n = \left(x_0 - \frac{b}{a} y_0 n\right) a^n$

d) Comme $a > 1$, on a, pour $n \in \mathbb{N}$, $a^n > 0$ donc :

$x_n \leqslant 0 \iff x_0 - \frac{b}{a} y_0 n \leqslant 0 \iff n \geqslant \frac{a x_0}{b y_0}$.

Donc la population X s'éteint après le temps $N = \frac{a x_0}{b y_0}$.

3) a) Cela correspond aux relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} x_{n+1} = a' x_n - b y_n \\ y_{n+1} = a y_n \end{cases}$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$x_{n+2} = a' x_{n+1} - b y_{n+1} = a' x_{n+1} - a b y_n = a' x_{n+1} + a(x_{n+1} - a' x_n)$$
$$= (a + a') x_{n+1} - a a' x_n.$$

Le polynôme caractéristique associé est

$P(X) = X^2 - (a + a') X - a a' = (X - a)(X - a')$: il a deux racines distinctes a et a' donc :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, \ x_n = \lambda a^n + \mu a'^n$$

On obtient alors $\begin{cases} x_0 = \lambda + \mu \\ x_1 = \lambda a + \mu a' = a' x_0 - b y_0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \mu = x_0 - \lambda \\ \lambda a + (x_0 - \lambda) a' = a' x_0 - b y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = x_0 - \lambda \\ \lambda (a - a') = -b y_0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu = x_0 - \lambda \\ \lambda = \dfrac{by_0}{a'-a} \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = x_0 - \dfrac{by_0}{a'-a} \\ \lambda = \dfrac{by_0}{a'-a} \end{cases}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{by_0}{a'-a} a^n + \left(x_0 - \dfrac{by_0}{a'-a} \right) a'^n$

c) Il s'agit de $x_0^* = \dfrac{by_0}{a'-a}$. En effet :

- <u>si $x_0 > x_0^*$</u> : alors $x_0 - \dfrac{by_0}{a'-a} > 0$ et comme $a' > 1$ et $\dfrac{by_0}{a'-a} > 0$ et $a > 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ donc la population X survit.

- <u>si $x_0 < x_0^*$</u> : alors, pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$x_n \leq 0 \iff x_0^* a^n + (x_0 - x_0^*) a'^n \leq 0$$

$$\iff x_0^* - (x_0^* - x_0)\left(\frac{a'}{a}\right)^n \leq 0 \quad \text{(correct car } a^n > 0\text{)}$$

$$\iff \left(\frac{a'}{a}\right)^n \geqslant \frac{x_0^*}{x_0^* - x_0} \quad \text{(correct car } x_0^* - x_0 > 0\text{)}$$

$$\iff n \ln\left(\frac{a'}{a}\right) \geq \ln\left(\frac{x_0^*}{x_0^* - x_0}\right)$$

$$\iff n \geqslant \ln\left(\frac{x_0^*}{x_0^* - x_0}\right) \Big/ \ln\left(\frac{a'}{a}\right) \quad \left(\text{correct car } \ln\left(\frac{a'}{a}\right) > 0 \text{ car } \frac{a'}{a} > 1 \text{ car } a' > a\right)$$

Ainsi la population X s'éteint après le temps

$$N = \frac{\ln\left(x_0^* / (x_0^* - x_0)\right)}{\ln(a'/a)}.$$