Boucles while — TP7

Exercice 1 — Pour s'échauffer

Q1 Écrire une fonction prenant en argument un entier n et renvoyant le plus petit entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $3^k \geq n$. Tester votre fonction.

Q2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+4}$. Écrire une fonction prenant en argument un réel M et renvoyant le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n > M$.

Q3 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{15u_n}{u_n + 10}$. On admet que la suite (u_n) est croissante et convergente.

1. Faire un dessin à la main représentant u_n en fonction de n.
2. Déterminer à partir de quel rang n, on a $u_n \geq 3$.
3. Même question pour $u_n \geq 4$? $u_n \geq 4,5$? $u_n \geq 5$?

Exercice 2 — À partir d'un certain rang

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = n(-1)^n + u_n \frac{n-5}{3n+2}$$

Q1 Écrire une fonction `suite` qui prend en argument en entier naturel `n` et renvoie la valeur de u_{n}. On vérifiera que `suite(100)` renvoie -75,5.

Q2 Écrire une fonction `audela`, utilisant la fonction `suite`, qui prend en argument une variable `seuil` et qui renvoie le plus petit rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq$ `seuil`. On vérifiera que `audela(10)` renvoie la valeur 13.

Q3 Écrire une fonction `endessous`, utilisant la fonction `suite`, qui prend en argument une variable `seuil` et qui renvoie le plus petit rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N <$ `seuil`.
On verifiera que `endessous(-10)` renvoie la valeur 14.

Q4 Si on s'intéresse à "l'efficacité" des fonctions, était-ce judicieux d'utiliser la fonction `suite` pour les fonctions `audela` et `endessous` ? Réécrire ces fonctions de manière plus efficace, et vérifier qu'on obtient bien le même résultat.

Exercice 3 Conjecture de Syracuse

Soit $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ la fonction définie par

$$f(k) = \begin{cases} \frac{k}{2} & \text{si } k \text{ est pair} \\ 3k+1 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

On appelle *«suite de Syracuse d'un entier N»* la suite (u_n) définie par $u_0 = N$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$.

Q1 Calculer à la main la suite de Syracuse de 3. Que se passe-t-il lorsque la suite atteint la valeur 1 ?

> **Remarque**
> La conjecture de Syracuse affirme que toutes les suites de Syracuse des entiers positifs atteignent la valeur 1 au bout d'un certain temps. Cette conjecture a été vérifiée pour tous les entiers naturels N inférieurs à 2^{62}, mais on ignore encore si elle est vraie.

Q2 Écrire une fonction `f` prenant en argument un entier `k` ≥ 1 et renvoyant $f($`k`$)$.

Q3 Écrire une fonction `syracuse` prenant en argument deux entiers `N` et `n` et renvoyant la valeur `syracuse(N,n)` $= u_n$ où (u_n) est la suite de Syracuse de `N`. On vérifiera que `syracuse(15,9)` renvoie la valeur 40.

Q4 Écrire une fonction `TempsVol` prenant en argument un entier `N` et renvoyant la plus petite valeur de n telle que le n-ème terme de la suite de Syracuse de l'entier N vaut 1 (on suppose que ce terme existe, c'est-à-dire que la conjecture est vérifiée). On vérifiera que `TempsVol(15)` renvoie la valeur 17.

Q5 Tracer les valeurs de `TempsVol(N)` en fonction de `N` pour $1 \leq$ `N` ≤ 1000.

> **Remarque**
> Pour tracer un graphique, on importera la bibliothèque `matplotlib.pyplot` en écrivant en amont du code :
>
> ```python
> import matplotlib.pyplot as plt
> ```
>
> On pourra ensuite dessiner les points du graphique un par un en utilisant la commande `plt.plot(x,y,'bo')` pour tracer un point bleu aux coordonnées `(x,y)`.

Q6 Que se passe-t-il si on choisit $N < 0$? On pourra consulter la vidéo du youtuber "El Jj" sur le sujet : `https://www.youtube.com/watch?v=BP2G28694z8`.