Exercice 1

1. Écrire les sommes et produits suivants avec des pointillés et les calculer :
   (a) $\displaystyle\sum_{k=-10}^{12} k$
   (b) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \sin\left(\frac{(k^2-4)\pi}{37}\right)$
2. Écrire les sommes et produits suivants avec le symbole $\sum$ ou $\prod$ et les calculer :
   (a) $1+3+5+7+\cdots+2023$
   (b) $2\times 4\times 6\times 8\times\cdots\times(2n)$

Exercice 2

Calculer les sommes et produits suivants, on n'hésitera pas à transformer un symbole $\sum$ ou $\prod$ en pointillés :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2k+2^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1} k^2$
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(3k)$
5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} 2^{-k}$

Exercice 3

En utilisant une formule de “découpage”, déterminer pour $q\in\mathbb{R}$ et $p\le n$ deux entiers naturels la valeur de $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k$.

Exercice 4

Écrire avec des factorielles les nombres suivants :

1. $\displaystyle\prod_{k=n}^{2n} k$
2. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$
3. $\dfrac{n(n+1)(n+2)\times\cdots\times(3n)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)\times\cdots\times(4n+1)}$

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\ge 1}$ la suite définie par : $u_1=\frac{1}{2}$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}=u_n\times\frac{\pi\, n^2}{(2n+1)(2n+2)}$$

1. Calculer $u_2,\ u_3,\ u_4$ puis établir une conjecture sur la valeur de u_n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
2. Démontrer cette conjecture.

Exercice 6

Calculer les sommes et produits suivants, on n'hésitera pas à utiliser des pointillés :

1. $\displaystyle\sum_{k=50}^{100} k$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{k+1}$
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k^2}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \ln(k+1)$
5. $\displaystyle\sum_{k=5}^{p} \ln(k+3)$
6. $\displaystyle\prod_{k=5}^{n-1} 2\sqrt{k}\,k$
7. $2^0-2^1+2^2-2^3+2^4-\cdots+2^{2n}-2^{2n+1}$

Exercice 7

1. Écrire avec des pointillés la somme $S=\displaystyle\sum_{k=7}^{n} u_{k+3}$ puis l'écrire sous la forme $S=\displaystyle\sum_{i=?}^{?} u_i$ en complétant les points d'interrogation.
2. Écrire avec des pointillés la somme $T=\displaystyle\sum_{k=3}^{10}(u_{k+1}-u_k)$ puis la simplifier.

Exercice 8

Pour $p\in\mathbb{N}$, que vaut : $p!\times(p+1)$?
Simplifier alors les expressions suivantes :

1. $\dfrac{(n+1)!}{n!}-\dfrac{n!}{(n-1)!}+\dfrac{(n+2)!}{n!}$
2. $\dfrac{(n+1)!-n!}{n}$
3. $\dfrac{1}{n!}-\dfrac{n}{(n+1)!}$

Exercice 9
Remplacer les symboles " ?" par la valeur correcte.

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+3} a_{k-1} = \sum_{j=?}^{?} a_j$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)a_k = \sum_{j=?}^{?} j a_?$
3. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} a_{n-k} = \sum_{j=?}^{?} a_j$
4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (n-k)^3 = \sum_{j=?}^{?} j^3$

Exercice 10
1. Simplifier via un décalage d'indice :
   (a) $\displaystyle\sum_{k=-2}^{n} (k+3)^2$
   (b) $\displaystyle\sum_{k=5}^{n+5} 2^k$
2. Simplifier via un téléscopage :
   (a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$
   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k+2} - \sqrt{k}$

Exercice 11
1. Simplifier via un retournement :
   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{e^n}{e^k}$
   (b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (n+1-k)$
2. Simplifier via un téléscopage :
   (a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)$
   (b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$

Exercice 12
Soit n un entier naturel non nul, on considère la somme :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

Calculer S en effectuant le retournement $k' = n-k$.

Exercice 13
1. Déterminer trois nombres réels a, b, c tels que pour tout $k \geq 1$, $\displaystyle\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.
2. En déduire pour $n \in \mathbb{N}^*$ la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$.
3. Par une technique similaire, calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$

Exercice 14
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme (dite harmonique) : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que la suite (H_n) est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$. (On écrira $H_{2n} - H_n$ sous forme d'une somme).
3. En déduire que $H_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. (On pourra utiliser qu'une suite croissante est soit convergente, soit tend vers $+\infty$).

Exercice 15
Calculer les coefficients binomiaux suivants :

1. $\binom{7}{3}$
2. $\binom{n}{2}$
3. $\binom{23}{22}$
4. $\binom{130}{128}$

Exercice 16
Développez à l'aide du binôme de Newton et des premières lignes du triangle de Pascal les quantités :

1. $(a+b)^5$
2. $(1+x)^4$
3. $(1-x)^6$
4. $(2x-1)^3$

Exercice 17
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in \mathbb{R}^*$, calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k-1}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k} \binom{n}{k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (-1)^k$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{k-n}$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} 2^{k-1}$

Exercice 18
Soient $0 \leq p \leq n$ des entiers.

1. Pour $k \in [\![0, p]\!]$, montrer que :
$$\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$$
2. À quoi correspond la formule ci-dessus lorsque $k = 1$?
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$

Exercice 19
En utilisant la formule d'absorption, calculer pour $n \geq 2$:

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$
2. $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$

Exercice 20
Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que :
$$(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n \in \mathbb{N}$$

Exercice 21
Calculer les valeurs de
$$P_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad I_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}$$

On pourra s'intéresser aux quantités $P_n + I_n$ et $P_n - I_n$.