Programme de colles : semaine 7, du 12/11 au 15/11

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Informatique en langage Python

- boucle `while`. Exemple d'algorithme de seuil, d'approximation numérique. Écriture d'une boucle `for` par une boucle `while`.

2 Études de fonctions

- *Reprise du programme précédent.*
- notion d'extremum global. *Seule la définition et l'interprétation graphique ont été abordées en classe.*
- caractérisations de la partie entière : pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a $\lfloor x \rfloor = n$ si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :
  - $n \leq x < n+1$
  - $x-1 < n \leq x$
  - $\exists t \in [0,1[\ :\ x = n+t$
- propriétés de la fonction partie entière : continuité sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, graphe, caractère croissant, $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$

3 Sommes et produits

La formule de Bernoulli, les coefficients binomiaux et les sommes doubles n'ont pas été abordés en classe. Les seules formules de sommes à connaître par cœur sont : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k,\ \sum_{k=1}^{n} k,\ \sum_{k=1}^{n} k^2$.

- symboles $\sum$ et $\prod$, caractère muet de l'indice de sommation, convention $\displaystyle\sum_{k\in\emptyset} a_k = 0$ et $\displaystyle\prod_{k\in\emptyset} a_k = 1$.
- exemple de la factorielle
- règles de calcul : linéarité de la somme, somme d'une constante, formules analogues pour les produits
- $\exp\left(\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k\right) = \displaystyle\prod_{k=p}^{n} \exp(a_k)$
- $\ln\left(\displaystyle\prod_{k=p}^{n} b_k\right) = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \ln(b_k)$
- $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} \lambda^{a_k} = \lambda^{\sum_{k=p}^{n} a_k}$
- démonstration d'une valeur de somme/produit par récurrence
- découpage : relation de Chasles, exemples : écriture de $\prod_{k=p}^{n} k$ avec des factorielles, formules pour $\sum_{k=m}^{n} q^k$ et $\sum_{k=m}^{n} k$. *Ces deux dernières formules ne sont pas à connaître par cœur mais doivent pouvoir être retrouvées sans difficulté.*
- découpage : termes pairs/impairs
- décalage : $\sum_{k=p}^{n} a_{k+r} = \sum_{j=p+r}^{n+r} a_j$, formule analogue pour le produit
- téléscopage : $\sum_{k=p}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p$, $\prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_p}$, exemple : calcul de la somme géométrique. *On conseille aux élèves de revenir au changement d'indice $j = k+1$ avant de simplifier une somme ou un produit téléscopique.*
- retournement : $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n-m} a_{n-j}$, formule analogue pour le produit, exemple : calcul de $\sum_{k=0}^{n} k$

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. *(Avec des parenthèses ad hoc...).* Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est (dé)croissante sur $\mathbb{R}$ et que g est (dé)croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f \circ g$ est (dé)croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0. Donner l'équation de la tangente au graphe de f en x_0.
3. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de "f est (im)paire" ou "f est T-périodique" et expliquer ce qu'on peut alors dire du graphe de f.
4. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que si $0 \in D$ alors $f(0) = 0$.
5. Présenter une fonction usuelle parmi : $x \longmapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, inverse, racine carrée, logarithme, exponentielle, $x \longmapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, cosinus, sinus, tangente, valeur absolue.
6. Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (resp. $(b_n) \in (\mathbb{R}_*^+)^{\mathbb{N}}$) et soit $p \in \mathbb{N}$. Démontrer par récurrence que : $\forall n \geq p,\ \exp\left(\sum_{k=p}^{n} a_k\right) = \prod_{k=p}^{n} \exp(a_k)$ (resp. que $\sum_{k=p}^{n} \ln(b_k) = \ln\left(\prod_{k=p}^{n} b_k\right)$).
7. En utilisant la valeur de $\sum_{k=0}^{m} q^k$, déterminer la valeur de $\sum_{k=p}^{n} q^k$ pour $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $p \leq n$. *(via un "découpage")*
8. Pour $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer la valeur de $S = \sum_{k=0}^{n} q^k$ en effectuant un téléscopage sur $(1-q)S$.
9. Soit $S = \sum_{k=0}^{n} k$. Déterminer la valeur de S en effectuant le retournement $j = n - k$.
10. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n+1}$. On admet que (u_n) est décroissante et tend vers 0. Écrire une fonction Python `seuil` prenant en argument $\varepsilon > 0$ et renvoyant la plus grande valeur de u_n telle que $u_n < \varepsilon$.

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type remédiation" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiation 5, tous les exos : `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=5400`

La question de cours est noté sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.