Feuille de cours 5 : sommes doubles

Dans tout ce document, $n, p, n_0, n_1, p_0, p_1, \ldots$ désignent des entiers ad hoc, et on considère pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$ des nombres réels (ou complexes) $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

1 Sommes doubles "rectangulaires"

Dans ce paragraphe, on cherche à calculer des sommes du type $\sum\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j}$. C'est-à-dire qu'on cherche à déterminer la somme de tous les $a_{i,j}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$.

Notation : lorsque $n = p$ on note $\sum\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j} = \sum\limits_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}$

1.1 Sommations par lignes et par colonnes

Rangeons les nombres $a_{i,j}$ dans un tableau à n lignes et p colonnes dans lequel $a_{i,j}$ est placé à la ligne i, colonne j.

Pour calculer $\sum\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j}$, on peut d'abord faire la somme sur chacune des lignes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} & \longrightarrow & a_{1,1} + \ldots + a_{1,j} + \ldots + a_{1,p} = \sum \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} & \longrightarrow & a_{i,1} + \ldots + a_{i,j} + \ldots + a_{i,p} = \sum \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} & \longrightarrow & a_{n,1} + \ldots + a_{n,j} + \ldots + a_{n,p} = \sum
\end{array}$$

Conclusion : en sommant ligne par ligne, on obtient

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} a_{1,j} + \ldots + \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} + \ldots + \sum_{j=1}^{p} a_{n,j} = \sum \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \right)$$

Pour calculer $\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j}$, on peut aussi faire la somme sur chacune des colonnes :

$$\begin{array}{ccccc}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\sum & & \sum & & \sum
\end{array}$$

Conclusion : en sommant colonne par colonne, on obtient

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} a_{i,p} = \sum \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right).$$

Finalement : $\boxed{\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j} = \qquad\qquad\qquad\qquad}$

Remarque : Les indices ne commencent pas forcément à 1. Plus généralement, on a :

$$\sum_{\substack{n_0\leq i\leq n_1\\p_0\leq j\leq p_1}} a_{i,j} = \sum_{i=n_0}^{n_1} \left(\sum_{j=p_0}^{p_1} a_{i,j}\right) = \sum_{j=p_0}^{p_1} \left(\sum_{i=n_0}^{n_1} a_{i,j}\right)$$

Plus généralement encore, on peut sommer sur des indices (i, j) appartenant à n'importe quel produit cartésien : $I \times J$ (c'est-à-dire pour tous les couples (i, j) avec $i \in I$ et $j \in J$) et alors

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I} \left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right)$$

Remarque : Il faut ensuite utiliser les outils usuels des sommes simples, en particulier :
Si $a_{i,j} = \tilde{a}_j$ ne dépend pas de i on peut simplifier la somme $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_j =$

De même, Si $a_{i,j} = \tilde{a}_i$ ne dépend pas de j on peut simplifier la somme $\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} \tilde{a}_i =$

Exercice 1
Calculer $S_1 = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} 1,\ S_2 = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} i,\ S_3 = \sum_{1\leq i,j\leq n} i+j$ et $S_4 = \sum_{1\leq i,j\leq n} ij$.

1.2 Cas des termes séparables

On s'intéresse au cas particulier où $a_{i,j}$ s'écrit $a_{i,j} = a_i b_j$.

Proposition 1
Soient $a_1, \dots a_n,\ b_1, \dots, b_p \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On a :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right)$$

Démonstration :

Exercice 2
Écrire sous forme d'une somme double : $\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

Exercice 3
Calculer pour $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$: $S_5 = \sum_{0\leq i,j\leq n} a^{i+j}$, $S_6 = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq p}} i\,a^j$, et $P = \prod_{1\leq i,j\leq n} ij$.

1.3 Et en Python ?

Pour faire une somme double du type $\sum_{\substack{a\leq i\leq b\\ c\leq j\leq d}}$ on utilise 2 boucles `for` imbriquées :

Exercice 4
Écrire une fonction Python prenant en argument deux entiers n et m et renvoyant la valeur de :

1. $\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq m}} \frac{i}{i+j}$
2. $\prod_{\substack{2\leq i\leq n+1\\ 0\leq j\leq m}} (i+2^j)$

2 Sommes doubles "triangulaires"

On se place dans le cas "carré" $n = p$. On range à nouveau les nombres $a_{i,j}$ dans un tableau (à n lignes et n colonnes). Le nombre $a_{i,j}$ est placé ligne i colonne j.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On souhaite calculer la somme des coefficients du tableau placés au-dessus ou en-dessous de la diagonale (diagonale incluse), c'est-à-dire les sommes :

- $\sum \quad a_{i,j}$ (termes au-dessus de la diagonale), ou

- $\sum \quad a_{i,j}$ (termes en-dessous de la diagonale).

Dans la suite, on s'intéresse à la deuxième somme, les résultats sont bien sûr similaires dans le cas de la première.

2.1 Sommations par lignes et par colonnes

Pour calculer $\displaystyle\sum_{1\leq j\leq i\leq n} a_{i,j}$, on peut d'abord faire la somme sur chacune des lignes :

$$\begin{array}{lllll l l} a_{1,1} & & & & & \longrightarrow & a_{1,1} = \sum \\ \vdots & \ddots & & & & & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i} & & & \longrightarrow & a_{i,1} + \ldots + a_{i,i} = \sum \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} & \longrightarrow & a_{n,1} + \ldots + a_{n,j} + \ldots + a_{n,n} = \sum \end{array}$$

Conclusion : en sommant ligne par ligne, on obtient

$$\sum_{1\leq j\leq i\leq n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{1} a_{1,j} + \cdots + \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} = \sum_{i=} \left(\sum_{j=} a_{i,j} \right)$$

Pour calculer $\sum\limits_{1\leq j\leq i\leq n} a_{i,j}$, on peut aussi faire la somme sur chacune des colonnes :

$$\begin{array}{ccccc}
a_{1,1} & & & & \\
\vdots & \ddots & & & \\
a_{i,1} & \cdots & a_{j,j} & & \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\sum a_{i,1} & & \sum a_{i,j} & & \sum a_{i,n}
\end{array}$$

Conclusion : en sommant colonne par colonne, on obtient

$$\sum_{1\leq j\leq i\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} + \ldots + \sum_{i=j}^{n} a_{i,j} + \ldots + \sum_{i=n}^{n} a_{i,n} = \sum_{j=} \left(\sum_{i=} a_{i,j}\right).$$

Finalement : $\boxed{\sum\limits_{1\leq j\leq i\leq n} a_{i,j} = \qquad\qquad\qquad\qquad}$

Exercice 5
Calculer $S = \sum\limits_{1\leq j\leq i\leq n} 1$.

Important : Attention, la somme à l'intérieur dépend de l'indice de la somme à l'extérieur. Contrairement aux sommes "rectangulaires" il ne suffit donc pas d'échanger les deux symboles sommes. En particulier, les égalités :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{j=1}^{i}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \quad \text{ou encore} \quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij} = \sum_{i=j}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

sont fausses (et n'ont aucun sens !).

Généralisations : De manière plus générale, pour $m, n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\sum_{m\leq k\leq \ell\leq n} a_{k,\ell} = \sum_{k=} \quad \sum_{\ell=} \quad a_{k,\ell} = \sum_{\ell=} \quad \sum_{k=} \quad a_{k,\ell}$$

On peut aussi traiter des inégalités strictes (cas où la diagonale "$i = j$" est exclue) :

$$\sum_{1\leq j<i\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=}^{n-1} \quad \sum_{i=} \quad a_{i,j} = \sum_{i=}^{n} \quad \sum_{j=} \quad a_{i,j}$$

On rappelle que par convention, toute somme vide est nulle : $\sum\limits_{i=1}^{0} b_i = \sum\limits_{j=n+1}^{n} b_j = 0$, de sorte qu'on peut aussi écrire :

$$\sum_{1\leq j<i\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=} \quad a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=} \quad a_{i,j}$$

à condition de se rappeler que les expressions $a_{n+1,n}$ et $a_{1,0}$ n'ont a priori pas de sens.

Exercice 6
Calculer $T = \displaystyle\sum_{1\leq j<i\leq n} 1$.

2.2 Méthodes

Il faut ensuite utiliser les outils usuels des sommes simples, en particulier :

- Si $a_{i,j} = \tilde{a}_i$ ne dépend pas de j on peut simplifier la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{i} \tilde{a}_i =$
- Si $a_{i,j} = \tilde{a}_j$ ne dépend pas de i on peut simplifier la somme $\displaystyle\sum_{i=j}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=j}^{n} \tilde{a}_j =$

Cette utilisation est un peu plus subtile que dans le cas "rectangulaire" car l'indice dont dépend $a_{i,j}$ peut lui-même être une borne...

Important : Le choix de l'ordre de sommation devient donc ici une étape essentielle du calcul : choisir le bon ordre simplifie (voire rend possible) le calcul de la somme.

Exercice 7
Écrire les deux ordres de sommations possibles pour calculer les sommes suivantes, choisir le bon, et terminer le caclul : $S_1 = \displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{1}{j}$, et $S_3 = \displaystyle\sum_{0\leq j\leq k\leq n} \binom{n}{k}\binom{k}{j} a^j\, b^{k-j}$.

Pour conclure, certaines sommes "rectangulaires" se prêtent particulièrement à un "découpage" en sommes "triangulaires". On écrit alors par exemple que :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} + \sum_{1\leq j<i\leq n} a_{i,j}$$

Exercice 8
Calculer $S_4 = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j)$ et $S_5 = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j)$

Exercice 9
Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_6 = \displaystyle\sum_{0\leq i<j\leq n} \frac{i^2}{j^2-j}$, $S_7 = \displaystyle\sum_{0\leq i\leq j\leq n} 2^{i-j}$

2.3 Et en Python ?

Pour faire une somme double du type $\displaystyle\sum_{a\leq i\leq j\leq b}$ on utilise 2 boucles `for` imbriquées :

Exercice 10
Écrire une fonction Python prenant en argument deux entiers n et m et renvoyant la valeur de :

1. $\displaystyle\sum_{1\leq j\leq i\leq n} \frac{i}{i+j}$
2. $\displaystyle\prod_{m\leq j<i\leq n} ij$

Exercice 11
Calculer les sommes et produits suivants pour $n, p \in \mathbb{N}^*$:

1. $S_1 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} i^2 j$
2. $S_2 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} 2^{i-j}$
3. $P_1 = \prod_{1 \leq i,j \leq n} i^2 j$
4. $P_2 = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} e^{i+j}$

Exercice 12
Calculer les sommes et produits suivants pour $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $S_1 = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} i + j$
2. $S_2 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$
3. $S_3 = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} \binom{n}{j}$
4. $S_4 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n-i}$
5. $S_5 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |i-j|$
6. $P_1 = \prod_{\substack{1 \leq i \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq j}} \left(\frac{k}{i}\right)^{1/j}$

Exercice 13
Pour $n \geq 1$ on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = \sum_{k=1}^{n} H_k$.
Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n = (n+1)H_n - n$.