
Mathématiques - mercredi 13 novembre 2024
Devoir n$^{\text{o}}$3 Durée : 3 h

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Les qualités de rédaction (clarté des raisonnements, lisibilité, orthographe...) seront sensiblement prises en considération dans l'évaluation des copies.**
- **Le sujet comporte 2 pages et 6 exercices.**
- **⚠ Consignes de présentation non respectées = -1 point sur la note finale. ⚠**

Exercice 1 (cours)**.**

1. (a) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de : "f est croissante sur $[0,1]$".
   (b) Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que f est croissante sur $\mathbb{R}$ et que g est décroissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f \circ g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Si f est une fonction dérivable en x_0, donner l'équation de la tangente au graphe de f en x_0.
   (b) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de ln en 1.
   (c) Tracer le graphe de la fonction ln et y dessiner la tangente dont l'équation a été déterminée à la question précédente.

Exercice 2 (calculs)**.**

1. Dériver les fonctions suivantes (on ne demande pas de préciser l'ensemble de dérivabilité) :
   $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 - e^{-x}}$ et $g : x \longmapsto \ln(1+\sqrt{x})$.
2. Simplifier la somme et le produit suivants : $S = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n+1} 2k$ et $P = \displaystyle\prod_{k=n}^{2n+1} 2k$.

Exercice 3 (type TD)**.**
Les 3 questions sont indépendantes.

1. Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^3$.
   (a) Justifier que la suite $(v_n) = (\ln(u_n))$ est correctement définie.
   (b) Que dire de (v_n) ? En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n. *On simplifiera le résultat au maximum.*
2. Faire l'étude complète de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. *Pour la limite de f en $+\infty$ on écrira $f(x)$ sous la forme* $\dfrac{1+e^{ax}}{1-e^{ax}}$ avec a à déterminer.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ xe^x \geq e^x - 1$.

Exercice 4 (formule de Bernoulli)**.**
La formule de Bernoulli énonce que pour tous réels a et b tels que $a \neq b$ et pour tout entier $n \geq 0$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

Dans cet exercice, on propose de démontrer cette formule selon plusieurs méthodes. Dans tout l'exercice, on fixe a et b deux réels tels que $a \neq b$ et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$.

1. (a) Explicitez les valeurs de $S_0,\ S_1$ et S_2 sans le symbole $\sum$.
   (b) Démontrer alors la formule de Bernoulli dans les cas $n = 0,\ n = 1$ et $n = 2$.

2. Dans cette question, on démontre la formule de Bernoulli par récurrence.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $S_{n+1} = bS_n + a^{n+1}$.
   (b) Démontrer alors la formule de Bernoulli par récurrence.
3. Dans cette question, on démontre la formule de Bernoulli via la formule de la somme géométrique $\sum_{k=0}^{n} q^k$.
   (a) Que vaut S_n lorsque $b = 0$? Démontrer alors la formule de Bernoulli dans ce cas.
   (b) On suppose que $b \neq 0$. Démontrer la formule de Bernoulli dans ce cas en utilisant la formule de la somme géométrique.
4. Dans cette question, on démontre la formule de Bernoulli via un téléscopage.
   (a) Développer la quantité $(a-b)S_n$.
   (b) En déduire la formule de Bernoulli via un téléscopage.

Exercice 5 (approximation de $\sqrt{2}$)**.**
On considère les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par $u_0 = v_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n + v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n. \end{cases}$$

1. Écrire une fonction Python `suite` prenant en argument n et renvoyant u_n et v_n.
2. Montrer que (u_n) vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n.$$

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
4. (a) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1+\sqrt{2}$. *On pourra factoriser par* $(1+\sqrt{2})^n$.
   (b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = \sqrt{2}$.
5. D'après la question précédente, on peut utiliser les suites (u_n) et (v_n) pour obtenir une approximation de $\sqrt{2}$. En effet, la quantité $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)^2$ tendant vers 2, on peut fixer un nombre ε suffisamment petit et considérer que $\dfrac{v_n}{u_n}$ est une approximation de $\sqrt{2}$ lorsque $\left|\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)^2 - 2\right| \leq \varepsilon$. Écrire une fonction Python `approx` prenant en argument ε et renvoyant une approximation de $\sqrt{2}$ au sens expliqué ci-dessus.

Exercice 6 (étude d'une somme par encadrement)**.**

1. En réalisant une étude de fonction, montrer que : $\forall x > 1,\ \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) \leq \dfrac{1}{x}$

On *admet* qu'un raisonnement similaire permet de montrer que : $\forall x > 1,\ \dfrac{1}{x} \leq \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

2. En déduire un encadrement de $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{k}$ pour tout entier $n \geq 2$.
3. Déterminer alors la limite de S_n lorsque $n \to +\infty$ en utilisant le théorème d'encadrement (ou "des gendarmes") rappelé ci-dessous :
   Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n$. Si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ alors (v_n) converge aussi vers ℓ.