DS 3 : Corrigé

Exercice 1 :

1) a) La fonction f est croissante sur $[0,1]$ lorsque :

$$\forall x,y \in [0,1], \quad (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$$

b) Soient $x,y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$.
Comme g est décroissante on a $g(x) \geq g(y)$.
Et comme f est croissante on a $f(g(x)) \geq f(g(y))$ c'est-à-dire $f\circ g(x) \geq f\circ g(y)$.
Ainsi on a montré que pour tous $x,y \in \mathbb{R}$,

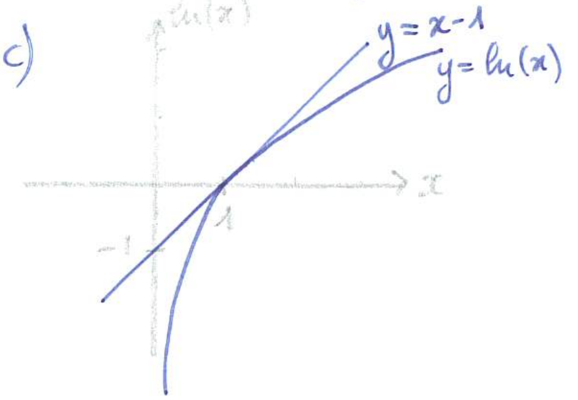
$$x \leq y \Rightarrow f\circ g(x) \geq f\circ g(y)$$

Donc $f\circ g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2) a) Cette tangente a pour équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

b) D'après la question précédente il s'agit de $y = \ln(1) + \ln'(1)(x-1)$
c'est-à-dire $\boxed{y = x - 1}$.

c)



Exercice 2 :

1) On a $f'(x) = \boxed{-\dfrac{2x + e^{-x}}{(x^2 - e^{-x})^2}}$ et $g'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}} = \boxed{\dfrac{1}{2(\sqrt{x} + x)}}$

2) On a $S = \sum_{k=n}^{2n+1} 2k = 2\sum_{k=n}^{2n+1} k = 2\left(\sum_{k=1}^{2n+1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k\right)$

$$= 2\left(\frac{(2n+1)(2n+1+1)}{2} - \frac{(n-1)(n-1+1)}{2}\right)$$

$$= (2n+1)(2n+2) - n(n-1) = 4n^2 + 2n + 4n + 2 - n^2 + n = \boxed{3n^2 + 7n + 2}$$

$$\text{et } P=\prod_{k=n}^{2n+1} 2k = \prod_{k=n}^{2n+1} 2 \times \prod_{k=n}^{2n+1} k = 2^{2n+1-n+1} \times \frac{\prod_{k=1}^{2n+1} k}{\prod_{k=1}^{n-1} k}$$

$$= \boxed{2^n \times \frac{(2n+1)!}{(n-1)!}}$$

Exercice 3 :

1) a) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$.

Pour $n=0$, on a $u_0=2>0$.

Supposons que $u_n>0$ pour un certain $n\in\mathbb{N}$. Alors $u_{n+1}=u_n^3>0$ car $u_n>0$.

Ainsi, par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n>0$, donc $(v_n)=(\ln(u_n))$ est bien défini.

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=\ln(u_{n+1})=\ln(u_n^3)=3\ln(u_n)=3v_n$.

Donc (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0=\ln(u_0)=\ln(2)$. Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=v_0\times 3^n=3^n\ln(2)$

Enfin, comme $v_n=\ln(u_n)$ on a : $\forall n\in\mathbb{N}$,

$u_n=\exp(v_n)=\exp(3^n\ln(2))=\boxed{2^{3^n}}$.

2) La fonction f est définie sur $\mathcal{D}_f=\{x\in\mathbb{R} : e^x-e^{-x}\neq 0\}$.

On a, pour $x\in\mathbb{R}$, $e^x-e^{-x}=0 \iff e^x=e^{-x} \iff x=-x \iff x=0$

Ainsi f est définie sur $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^*$.

L'ensemble $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0 et : $\forall x\in\mathbb{R}^*$,

$$f(-x)=\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{e^{-x}-e^{-(-x)}}=\frac{e^{-x}+e^{x}}{e^{-x}-e^{x}}=-\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=-f(x)$$

Donc f est impaire. Ainsi, on étudie f uniquement sur $\mathcal{D}_f\cap\mathbb{R}^+=\mathbb{R}^+_*$.

La fonction f est aussi dérivable sur $\mathcal{D}'_f = \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$, et $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$= \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x} - (e^{2x} + 2 + e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$= \boxed{-\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2}}$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $(e^x - e^{-x})^2 > 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) < 0$, ainsi f est décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$ (et sur $\mathbb{R}_*^-$).

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	
f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	1

Calculons les limites en 0^+ et en $+\infty$:

en 0^+ : $e^x + e^{-x} \xrightarrow[x \to 0]{} e^0 + e^0 = 2$

et $e^x - e^{-x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0^+$ car $e^0 - e^{-0} = 0$ et que si $x > 0$ alors $x > -x$ donc $e^x > e^{-x}$ donc $e^x - e^{-x} > 0$.

Ainsi $\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty}$

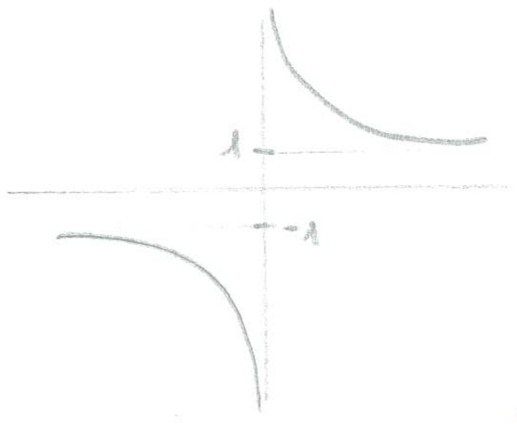
en $+\infty$: Commençons par écrire pour $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^x(1 + e^{-2x})}{e^x(1 - e^{-2x})} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$$

Comme $-2x \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$ et que $e^y \xrightarrow[y \to -\infty]{} 0$ on a $e^{-2x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1+0}{1-0} = \boxed{1.}$

On obtient finalement le graphe de f ci-contre qu'on a d'abord tracé sur $\mathbb{R}_*^+$ puis complété par symétrie par rapport à l'origine car f est impaire



3) Posons $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$: x \mapsto xe^x - e^x + 1$ et étudions h pour montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) \geqslant 0$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$.

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $h'(x) \geqslant 0 \iff xe^x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$ (car $e^x > 0$)

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On calcule alors que $h(0) = 0 \times e^0 - e^0 + 1$
$= -1 + 1 = 0$

On lit donc dans ce tableau que h admet un minimum en 0, valant 0, donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire

$\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ xe^x \geqslant e^x - 1.}$

Exercice 4 :

1) a) On a $S_0 = \sum_{k=0}^{0} a^k b^{0-k} = a^0 b^{0-0} = \underline{1}$

$S_1 = \sum_{k=0}^{1} a^k b^{1-k} = a^0 b^1 + a^1 b^0 = \underline{b + a}$

et $S_2 = \sum_{k=0}^{2} a^k b^{2-k} = a^0 b^2 + a^1 b^1 + a^2 b^0 = \underline{b^2 + ab + a^2}$

b) Pour $n = 0$, on a $\dfrac{a^{0+1} - b^{0+1}}{a-b} = \dfrac{a-b}{a-b} = 1 = S_0$

Pour $n = 1$, on a $\dfrac{a^{1+1} - b^{1+1}}{a-b} = \dfrac{a^2 - b^2}{a-b} = \dfrac{(a-b)(a+b)}{a-b} = a + b = S_1$

Et pour $n = 2$, on a :

$(a-b)S_2 = (a-b)(b^2 + ab + a^2) = ab^2 + a^2b + a^3 - b^3 - ab^2 - ba^2$
$= a^3 - b^3$

donc (puisque $a \neq b$ donc $a - b \neq 0$), $S_2 = \dfrac{a^3 - b^3}{a-b}$.

Ainsi la formule de Bernoulli est vraie pour $n \in \{0, 1, 2\}$.

2) a) On a $S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} b^{n+1-(n+1)}$

$$= \sum_{k=0}^{n} a^k b \times b^{n-k} + a^{n+1} b^0$$

$$= b \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} + a^{n+1}$$

$$= b S_n + a^{n+1}$$

b) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$.

Pour $n=0$, on a bien $S_0 = \frac{a^{0+1} - b^{0+1}}{a-b}$ comme vu à la question 1.

Supposons que $S_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors :

$S_{n+1} = bS_n + a^{n+1}$ (d'après 2.a))

$= b \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} + a^{n+1}$ (par hypothèse de récurrence)

$$= \frac{ba^{n+1} - b^{n+2} + (a-b)a^{n+1}}{a-b}$$

$$= \frac{ba^{n+1} - b^{n+2} + a^{n+2} - ba^{n+1}}{a-b}$$

$= \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a-b}$ ce qu'il fallait démontrer

Ainsi on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$.

3) a) En écrivant que $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = a^0 b^n + a^1 b^{n-1} + \dots + a^{n-1} b^1 + a^n b^0$

$$= b^n + ab^{n-1} + \dots + a^{n-1} b + a^n$$

on voit que lorsque $b=0$ on a : $S_n = a^n$.

Or $\frac{a^{n+1} - 0^{n+1}}{a-0} = \frac{a^{n+1}}{a} = a^n$. Donc la formule de Bernoulli est vraie pour $b=0$.

b) Lorsque $b \neq 0$, on peut écrire :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a^k b^n \times \frac{1}{b^k} = \boxed{b^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a}{b}\right)^k}$$

Or $a \neq b$ donc $\frac{a}{b} \neq 1$ donc on peut utiliser la formule de la somme géométrique et :

$$S_n = b^n \times \frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{1-\frac{a}{b}} = b^n \times \frac{b \times \left(1-\frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}\right)}{b \times \left(1-\frac{a}{b}\right)}$$

$$= \frac{b^{n+1}\left(1-\frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}\right)}{b-a} = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} = \underline{\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}}$$

4) a) On a $(a-b)S_n = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = a\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} - b\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$

$$= \underline{\sum_{k=0}^{n} a^{k+1} b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n+1-k}}$$

b) Via le changement d'indice $j = k+1$ on a (puisque $k = j-1$ et que $0 \leq k \leq n \iff 1 \leq j \leq n+1$)

$$\sum_{k=0}^{n} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{j=1}^{n+1} a^j b^{n-(j-1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} a^k b^{n+1-k}$$

Ainsi $(a-b)S_n = \sum_{k=1}^{n+1} a^k b^{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n+1-k}$

$$= a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} - a^0 b^{n+1-0} \quad \text{(via télescopage)}$$

$$= \underline{a^{n+1} - b^{n+1}}$$

Finalement (puisque $a \neq b$, donc $a-b \neq 0$), $S_n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$.

Exercice 5 :

1)
```
def suite(n):
    u,v = 1,1
    for k in range(n):
        u,v = u+v, 2*u+v
    return u,v
```

2) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n + 2u_n + v_n = 3u_n + 2v_n$$

Or $u_{n+1} = u_n + v_n$ donc $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Ainsi $u_{n+2} = 3u_n + 2(u_{n+1} - u_n) = \underline{2u_{n+1} + u_n}$

3) La suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. Le polynôme caractéristique associé est $X^2 - 2X - 1$. Son discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4\times(-1) = 8$. Il admet donc pour racines $\frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2}$ et $\frac{2-\sqrt{8}}{2} = 1-\sqrt{2}$. D'après le cours, on en déduit que :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda(1+\sqrt{2})^n + \mu(1-\sqrt{2})^n$$

On détermine alors λ et μ en résolvant le système suivant issu des cas $n=0$ et $n=1$:

$$\begin{cases} \lambda(1+\sqrt{2})^0 + \mu(1+\sqrt{2})^0 = u_0 = 1 \\ \lambda(1+\sqrt{2})^1 + \mu(1-\sqrt{2})^1 = u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda(1+\sqrt{2}) + \mu(1-\sqrt{2}) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu = 1-\lambda \\ \lambda(1+\sqrt{2}) + (1-\lambda)(1-\sqrt{2}) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 1-\lambda \\ 2\sqrt{2}\lambda + 1 - \sqrt{2} = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1-\lambda \\ 2\sqrt{2}\,\lambda = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^n + \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^n}$

4) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{n+1} + \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^{n+1}}{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^n + \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^n} = \frac{(1+\sqrt{2})^n \times \left((1+\sqrt{2}) + \frac{(1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^n}\right)}{(1+\sqrt{2})^n \times \left(1 + \frac{(1-\sqrt{2})^n}{(1+\sqrt{2})^n}\right)}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2} + (1-\sqrt{2}) \times q^n}{1+q^n} \quad \text{où } q = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

Or $-(1+\sqrt{2}) < 1-\sqrt{2} < 1+\sqrt{2}$ donc $-1 < \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} < 1$

donc $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to0]{} \frac{1+\sqrt{2} + (1-\sqrt{2})\times 0}{1+0} = 1+\sqrt{2}$

Ainsi $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1+\sqrt{2}}$

b) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\frac{v_n}{u_n} = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

Or $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1+\sqrt{2}$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1+\sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$.

Donc $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = \sqrt{2}}$.

5)
```
def approx(ε):
    u, v = 1, 1
    while abs((v/u)**2 - 2) > ε:
        u, v = u + v, 2*u + v
    return v/u
```

Exercice 6 :

1) Posons $h :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ et étudions h pour montrer que :
$: x \mapsto \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ $\qquad \forall x>1,\ h(x) \geqslant 0$.

Comme, pour $x>1$, $x+1>0$ et $x>0$, on peut écrire :
$\forall x>1,\ h(x) = \frac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln(x)$.
La fonction h est alors dérivable sur $]1,+\infty[$ et : $\forall x>1$,

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{-(x+1) - x^2 + x(x+1)}{x^2(x+1)} = -\frac{1}{x^2(x+1)}$$

Ainsi, $\forall x>1$, $x^2(x+1)>0$ donc $h'(x)<0$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	1	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	
h	$\searrow$	0

On calcule la limite de h en $+\infty$:

On a : $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

et $\ln(y) \xrightarrow[y\to 1]{} 0$

Donc $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Par ailleurs $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Donc $h(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Dans le tableau de variations de h, on lit que : $\forall x>1$, $h(x) \geqslant 0$
c'est-à-dire que : $\forall x>1$, $\frac{1}{x} \geqslant \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

2) En prenant $x = k$ dans les inégalités précédentes on a
$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$, donc en sommant

$$\boxed{\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant S_n \leqslant \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)}.$$

3) On calcule que :

$$\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=n}^{2n} \ln(k+1) - \sum_{k=n}^{2n} \ln(k)$$
$$= \sum_{k=n+1}^{2n+1} \ln(k) - \sum_{k=n}^{2n} \ln(k)$$
$$= \ln(2n+1) - \ln(n) \text{ (par télescopage)}$$
$$= \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$
$$= \underline{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}.$$

et de même :

$$\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = \sum_{k=n}^{2n} \ln(k) - \sum_{k=n}^{2n} \ln(k-1) = \sum_{k=n}^{2n} \ln(k) - \sum_{k=n-1}^{2n-1} \ln(k)$$
$$= \ln(2n) - \ln(n-1) = \underline{\ln\left(\frac{2n}{n-1}\right)}$$

Donc : $\forall n \geq 2$, $\underline{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq \ln\left(\frac{2n}{n-1}\right)}$.

Or $2+\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ donc $\ln\left(2+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$.

Et $\frac{2n}{n-1} = \frac{2}{1-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{1-0} = 2$ donc $\ln\left(\frac{2n}{n-1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$

Dès lors, d'après le théorème d'encadrement, on a

$$\boxed{S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2).}$$