Programme de colles : semaine 8, du 18/11 au 22/11

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Sommes et produits

La formule de Bernoulli a été vue en DS mais pas en classe. La valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^3$ n'a pas été vue en classe.

- symboles $\sum$ et $\prod$, caractère muet de l'indice de sommation, convention $\sum_{k\in\emptyset} a_k = 0$ et $\prod_{k\in\emptyset} a_k = 1$.
- exemple de la factorielle
- règles de calcul : linéarité de la somme, somme d'une constante, formules analogues pour les produits
- $\exp\left(\sum_{k=p}^{n} a_k\right) = \prod_{k=p}^{n} \exp(a_k)$
- $\ln\left(\prod_{k=p}^{n} b_k\right) = \sum_{k=p}^{n} \ln(b_k)$
- $\prod_{k=p}^{n} \lambda^{a_k} = \lambda^{\sum_{k=p}^{n} a_k}$
- démonstration d'une valeur de somme/produit par récurrence
- découpage : relation de Chasles, exemples : écriture de $\prod_{k=p}^{n} k$ avec des factorielles, formules pour $\sum_{k=m}^{n} q^k$ et $\sum_{k=m}^{n} k$. *Ces deux dernières formules ne sont pas à connaître par cœur mais doivent pouvoir être retrouvées sans difficulté.*
- découpage : termes pairs/impairs
- décalage : $\sum_{k=p}^{n} a_{k+r} = \sum_{j=p+r}^{n+r} a_j$, formule analogue pour le produit
- téléscopage : $\sum_{k=p}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p$, $\prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_p}$, exemple : calcul de la somme géométrique. *On conseille aux élèves de revenir au changement d'indice $j = k+1$ avant de simplifier une somme ou un produit téléscopique.*
- retournement : $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n-m} a_{n-j}$, formule analogue pour le produit, exemple : calcul de $\sum_{k=0}^{n} k$
- coefficients binomiaux, $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$. *L'interprétation combinatoire de ces coefficients n'a pas été abordée en classe.*
- formule de symétrie : $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, d'absorption : $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ et de Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
- triangle de Pascal
- formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, exemple : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

Sommes doubles : seules les sommes "rectangulaires" ont été abordées en classe. Des exemples de "produits doubles" ont été étudiés.

- sommes doubles rectangulaires : $\sum_{\substack{n_0\le i\le n_1 \\ p_0\le j\le p_1}} a_{i,j} = \sum_{i=n_0}^{n_1}\left(\sum_{j=p_0}^{p_1} a_{i,j}\right) = \sum_{j=p_0}^{p_1}\left(\sum_{i=n_0}^{n_1} a_{i,j}\right)$.
- On note $\sum_{n_0\le i,j\le n_1} = \sum_{\substack{n_0\le i\le n_1 \\ n_0\le j\le n_1}}$
- cas des termes séparables pour les sommes rectangulaires : $\sum_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right)$

2 Informatique en langage Python

- boucle `while`. Exemple d'algorithme de seuil, d'approximation numérique. Écriture d'une boucle `for` par une boucle `while`.

3 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (resp. $(b_n) \in (\mathbb{R}_*^+)^{\mathbb{N}}$) et soit $p \in \mathbb{N}$. Démontrer par récurrence que : $\forall n \geq p,\ \exp\left(\sum_{k=p}^{n} a_k\right) = \prod_{k=p}^{n} \exp(a_k)$ (resp. que $\sum_{k=p}^{n} \ln(b_k) = \ln\left(\prod_{k=p}^{n} b_k\right)$).
2. En utilisant la valeur de $\sum_{k=0}^{m} q^k$, déterminer la valeur de $\sum_{k=p}^{n} q^k$ pour $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $p \leq n$. *(via un "découpage")*
3. Pour $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer la valeur de $S = \sum_{k=0}^{n} q^k$ en effectuant un téléscopage sur $(1-q)S$.
4. Soit $S = \sum_{k=0}^{n} k$. Déterminer la valeur de S en effectuant le retournement $j = n - k$.
5. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n+1}$. On admet que (u_n) est décroissante et tend vers 0. Écrire une fonction Python `seuil` prenant en argument $\varepsilon > 0$ et renvoyant la plus grande valeur de u_n telle que $u_n < \varepsilon$.
6. Rappeler la définition des coefficients binomiaux puis énoncer et démontrer une formule parmi : formule de symétrie, formule d'absorption, formule de Pascal.
7. Énoncer la formule du binôme de Newton.
8. À l'aide du binôme de Newton et du triangle de Pascal, développer rapidement $(1+x)^5$ et $(x-1)^5$ pour $x \in \mathbb{R}$ (ou des quantités similaires choisies par l'examinateur).
9. Calculer $\sum_{1 \leq i,j \leq n} ij$.

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type remédiation" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiation 5, tous les exos : `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=5400`

La question de cours est noté sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.