NOM :

PRENOM :

Bonus / malus exos :

Question 1 (/1 pt). Compléter la définition du coefficient binomial :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, alors $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Question 2 (/2 pts). Énoncer la formule du binôme de Newton.

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a, b \in \mathbb{R}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Question 3 (/2 pts). Dériver la fonction suivante. On ne demande pas de préciser l'ensemble de dérivabilité.

$$f : x \longmapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin^3(x)$$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \times \cos'\left(\frac{1}{x}\right) + 3\sin'(x)\sin^2(x)$

$= \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 3\cos(x)\sin^2(x)$

Question 4 (/5 pts). Calculer les sommes suivantes pour $x \in \mathbb{R}^*$:

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{x^k}$
2. $S_2 = \sum_{k=1}^{n} (1-x)^k$
3. $S_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}$

1) $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{x}\right)^k 1^{n-k} = \left(\frac{1}{x} + 1\right)^n$

2) $S_2 = \sum_{k=0}^{n} (1-x)^k - (1-x)^0 \underset{(*)}{=} \frac{1-(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)} - 1 = \frac{1-(1-x)^{n+1}}{x} - 1$

(correct en $(*)$ car $1-x \neq 1$ car $x \neq 0$).

3) $S_3 = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j}$ (via $j = k+1$)

$= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} 1^j 1^{n+1-j} - \binom{n+1}{0}$

$= 2^{n+1} - 1$

NOM :

PRENOM :

Bonus / malus exos :

Question 1 (/2 pts). Énoncer la formule du binôme de Newton.

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a,b \in \mathbb{R}, \ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Question 2 (/1 pt). Compléter la définition du coefficient binomial :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, alors $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Question 3 (/2 pts). Dériver la fonction suivante. On ne demande pas de préciser l'ensemble de dérivabilité.

$$f : x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos^3(x)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \sin'\left(\frac{1}{x}\right) + 3\cos'(x)\cos^2(x)$$
$$= -\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 3\sin(x)\cos^2(x)$$

Question 4 (/5 pts). Calculer les sommes suivantes pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$:

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x^k}$
2. $S_2 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k$
3. $S_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}$

1) $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{x}\right)^k \underset{(*)}{=} \dfrac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{x}} = \dfrac{x\left(1-\frac{1}{x^{n+1}}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{x - x^{-n}}{x-1}$

(correct en $(*)$ car $\frac{1}{x} \neq 1$ car $x \neq 1$)

2) $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} - \binom{n}{0} x^0 = (x+1)^n - 1$

3) $S_3 = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j}$ (via $j = k+1$)

$= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} 1^j 1^{n+1-j} - \binom{n+1}{0}$

$= 2^{n+1} - 1$