

Exercice 1

Calculer :

<ol style="list-style-type: none"> 1. $\sum_{j=0}^{n-2} 3^j$ 2. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{-k}$ 3. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{2k+1}$ 4. $\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (x-1)^k$ 		<ol style="list-style-type: none"> 5. $\sum_{k=2}^{n+2} \binom{n+2}{k-1}$ 6. $\prod_{k=1}^n \frac{2}{k}$ 7. $\prod_{k=2}^{n-1} 3^{-k}$ 8. $\sum_{k=0}^n (1-x)^k (1+x)^{n-k}$
---	--	--

Exercice 2

Dans cet exercice, on propose une stratégie (autre que la récurrence, vue dans une précédente feuille de remédiation) pour démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

1. Développer à l'aide du binôme de Newton la quantité $(k+1)^4 - k^4$.
2. En déduire la valeur de $S = \sum_{k=0}^n (k+1)^4 - k^4$ en fonction de $\sum_{k=0}^n k^3$ et de n .
3. En calculant S selon une autre méthode, en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n k^3$.

Exercice 3

Pour $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $p \in \mathbb{N}$, on a démontré dans l'exercice 3 du TD 5 via un "découpage" la formule suivante :

$$(*) : \forall n \geq p, \sum_{k=p}^n q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q}$$

Redémontrer cette formule en effectuant un changement d'indice judicieux pour utiliser la formule pour $\sum_{k=0}^m q^k$.

Exercice 4

Calculer :

<ol style="list-style-type: none"> 1. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k}$ 2. $\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} 2^k 3^{n+1-k}$ 	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; vertical-align: top; padding-right: 20px;"> <ol style="list-style-type: none"> 3. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{3^{k+1}}$ 4. $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1}$ </td> <td style="width: 5%; vertical-align: middle; text-align: center;"> </td> <td style="width: 45%; vertical-align: top;"> <ol style="list-style-type: none"> 5. $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$ 6. $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k y^{n-k}$ </td> </tr> </table>	<ol style="list-style-type: none"> 3. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{3^{k+1}}$ 4. $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1}$ 		<ol style="list-style-type: none"> 5. $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$ 6. $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k y^{n-k}$
<ol style="list-style-type: none"> 3. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{3^{k+1}}$ 4. $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1}$ 		<ol style="list-style-type: none"> 5. $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$ 6. $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k y^{n-k}$ 		