Feuille de cours 6 : polynômes réels

1 Polynômes et coefficients

1.1 Définition

Définition 1

1. On appelle <u>monôme</u> (ou fonction monomiale) toute fonction de la forme $\begin{array}{ll} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ : x & \longmapsto & a_k x^k \end{array}$ où $a_k \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.
2. On appelle <u>polynôme</u> (ou fonction polynomiale) toute fonction qui est somme de monômes : $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un polynôme lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$
3. Les scalaires $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ sont alors appelés <u>coefficients</u> de P.

Remarque 2
On utilise usuellement la notation X^k pour désigner le monôme (i.e. la *fonction*) $x \longmapsto x^k$. Ainsi, on peut noter

$$\boxed{P = P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n}$$

pour désigner le polynôme (i.e. la *fonction*) P. Gardez en tête que ce “grand X” formel désigne une fonction ; et utilisez un “petit $x \in \mathbb{R}$” pour désigner la valeur du polynôme en un point de $\mathbb{R}$. (En particulier, n'écrivez jamais que $X \in \mathbb{R}$!).

Notation : L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 1

- $1 + X + X^2 \in \mathbb{R}[X]$
- Attention, $1 + X + X^{3/2}$ ou $\displaystyle\sum_{k=-3}^{3} X^k$ ne sont pas des polynômes.
- Par convention $X^0 = 1$; un polynôme s'écrivant $P = a_0 X^0 = a_0$ avec $a_0 \in \mathbb{R}$ est appelé polynôme constant.
- Le polynôme nul est la fonction $x \longmapsto 0$. On le note simplement 0.

1.2 Unicité de l'écriture d'un polynôme

Proposition 3

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Si $P = 0$ alors $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Démonstration :

Corollaire 1
Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$. On a $P = Q$ si et seulement si $n = m$ et $\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = b_k$.

Démonstration : Si tous les coefficients a_k et b_k sont égaux alors clairement $P = Q$. Réciproquement, supposons que $P = Q$ et montrons que P et Q ont les mêmes coefficients.
Sans perte de généralité, supposons $n \leq m$. Alors on peut écrire :

$$P - Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - \sum_{k=0}^{m} b_k X^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k) X^k - \sum_{k=n+1}^{m} b_k X^k$$

Dès lors, comme $P - Q = 0$ la proposition précédente fournit que tous les coefficients de $P - Q$ sont nuls c'est-à-dire : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k - b_k = 0$ et $\forall k \in [\![n+1, m]\!],\ b_k = 0$.
Or on a par hypothèse $b_m \neq 0$, cela force donc à ce que $n = m$ et $\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = b_k$.

Remarque : Cela montre en fait que dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est

À retenir : on a égalité entre deux polynômes si et seulement s'ils ont les mêmes coefficients.

Exercice 1

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ pour que $(1 + X)(a + bX) = c + dX$.
2. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que : $1 + X + X^2 + X^3 = c + (b + c)X + (a + b)X^2 + aX^3$.

1.3 Degré d'un polynôme

Définition 4

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme. On appelle <u>degré de P</u> et on note $\deg(P)$ le plus grand entier d tel que $a_d \neq 0$:

$$\boxed{\deg(P) = \max\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_k \neq 0\}}$$

Par convention, le polynôme nul est de degré $-\infty$: $\boxed{\deg(0) = -\infty}$.

Exemple 2

- $\deg(-1 + 3X^2) =$
- les polynômes de degré 0 sont les polynômes constants non nuls :
  $\deg(P) = 0 \iff \exists a_0 \in \mathbb{R}^* \ : \ P = a_0$.

Définition 5

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n. On appelle <u>coefficient constant</u> de P le scalaire a_0, et <u>coefficient dominant</u> de P le scalaire $a_n \neq 0$. Lorsque $a_n = 1$, on dit que P est <u>unitaire</u>.

Remarque 6

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, c'est-à-dire s'écrivant $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ pour $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Exemple : $\mathbb{R}_3[X] =$

Attention, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ n'est pas automatiquement de degré n ! On peut seulement dire que

2 Opérations

2.1 Multiplication par un scalaire et somme

Proposition 7

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda P \in \mathbb{R}[X]$ et $P + Q \in \mathbb{R}[X]$.

Exemple 3 $(X^2 + X + 1) + 2(X - 1) =$

Proposition 8

- $\deg(\lambda P) = \begin{cases} \deg(P) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$.
- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.
  De plus, si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Remarque 9
Attention, en règle générale on n'a pas $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$ car les termes dominants de P et Q peuvent se compenser ! Par exemple, pour $P(X) = 4X^2 + 3X - 2$ et $Q(X) = -4X^2 - 1$, on a :

2.2 Produit

Proposition 10
Si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ alors $P \times Q \in \mathbb{R}[X]$.

Exemple 4

1. Si $P = X^2 + X + 1$ et $Q = 2X^2 + 3X + 1$ alors
   $PQ =$

2. Si $P = 1 + \sqrt{2}X + X^2$ et $Q = 1 - \sqrt{2}X + X^2$ alors
   $PQ =$

Remarque 11
Pensez à rassembler directement les termes de même degré.
Par exemple, le terme en X^3 dans le produit $(1 + 2X + 3X^2 + 4X^3)(5 + 6X + 7X^2 + 8X^3)$ est (sans avoir à tout développer) :

Proposition 12
Si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, alors : $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Exercice 2
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P^2 = P$.

2.3 Composition

Définition 13

Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

On définit $P \circ Q \in \mathbb{R}[X]$ par $(P \circ Q)(X) = P(Q(X)) = \sum_{k=0}^{n} a_k (Q(X))^k$.

Exercice 3

Calculer $P \circ Q$ dans chacun des cas suivants :

1. $P = 1 + 2X^2$, $Q = 1 + X$
2. $P = X - X^2$, $Q = X + X^2$

Remarque 14

1. La composition n'est pas commutative : $P \circ Q \neq Q \circ P$ en général (prendre par exemple $P = X^2$ et $Q = 1 + X$ pour s'en convaincre).
2. Lorsque $Q(X) = X$, on a $P \circ Q = P(X) = P$ ce qui justifie l'écriture $P(X)$ pour désigner la fonction P.

2.4 Dérivation

Définition 15

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$.

On définit son polynôme dérivé $P' \in \mathbb{R}[X]$ par $\boxed{P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k.}$

De plus, pour tout $j \in \mathbb{N}$ on définit ses dérivées successives $P^{(j)} \in \mathbb{R}[X]$ par récurrence : $P^{(0)} = P$ et $\forall j \in \mathbb{N},\ P^{(j+1)} = (P^{(j)})'$.

Proposition 16

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on a : $\deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \underline{\text{si } P \text{ n'est pas constant}} \text{ i.e. si } \deg(P) \geq 1 \\ -\infty & \text{si } P \text{ est constant.} \end{cases}$

Par suite, si $\deg(P) = n$ alors pour $j \in \mathbb{N}$ on a : $\deg(P^{(j)}) = \begin{cases} n - j & \text{si } j \leq n \\ -\infty & \text{si } j > n. \end{cases}$

Remarque 17

1. Cette définition est bien sûr cohérente avec la dérivation des fonctions.
2. On a les règles usuelles pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $(\lambda P)' = \lambda P'$, $(P+Q)' = P' + Q'$ et $\forall j \geq 0,\ (P+Q)^{(j)} = P^{(j)} + Q^{(j)}$, $(PQ)' = P'Q + PQ'$, $(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$.

Exemple 5 Soit $P = 2X^3 - X + 2$. Alors :

Exercice 4

Déterminer selon le principe de l'exercice 2 tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(P')^2 = 4P$.

3 Racines et factorisation

3.1 Définitions

Définition 18
Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$. On dit que B divise A (ou que A est factorisable par B, ou que A est un multiple de B) lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = QB$.

Exemple 6 $1 + X$ divise $1 - X^2$ puisque $1 - X^2 = (1 + X)(1 - X)$.

Remarque 19
Si B divise A avec $A = QB$ alors $\deg(A) = \deg(Q) + \deg(B)$. On en déduit deux remarques importantes :

1. En particulier $\deg(B) \leq \deg(A)$. Il est ainsi évident que $1 + X^4$, qui est de degré 4, ne peut pas diviser $2 - X - X^3$ qui n'est que de degré 3.
2. Le degré du "quotient" Q est $\deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$. Cela permet de savoir sous quelle forme le chercher.

Exercice 5
1. $B = 1 + X^2$ divise-t-il $A = 3 - X + 3X^2 - X^3 + X^4$?
2. $C = X + 2$ divise-t-il $D = X^3 + X^2 - 2X$?

Définition 20
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que α est une racine de P lorsque $P(\alpha) = 0$ i.e. lorsque $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n = 0$.

Exemple 7
1. 3 est une racine de $X^2 - 4X + 3$ puisque
2. 0 est racine de $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ si et seulement si $a_0 = 0$ (car $P(0) = a_0$). Devant un polynôme de degré 2 du type $P = aX^2 + bX$, il est donc très maladroit de calculer le discriminant pour finalement se rendre compte que 0 est racine de P !

Remarque 21
Attention au vocabulaire : on dit que α est une *racine de* P lorsque c'est une *solution de l'équation* $P(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Parler de "solution de P" ou de "racine de l'équation" est incorrect.

3.2 Lien entre racines et factorisation

Proposition 22
Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors α est racine de P si et seulement si P est factorisable par $X - \alpha$:

$$\boxed{P(\alpha) = 0 \iff \exists Q \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P(X) = (X - \alpha)Q(X).}$$

Remarque 23

1. On a alors $\deg(Q) = \deg(P) - 1$.
2. **Attention** au signe moins dans $(X - \alpha)$.

Exemple 8 Dans l'exercice précédent, on peut raisonner ainsi :

$C = X + 2$ divise $D = X^3 + X^2 - 2X$ $\iff$ $D = X^3 + X^2 - 2X$ est factorisable par $C = X - (-2)$
$\iff$ est racine de
$\iff$

Démonstration de la proposition 22 : Si $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$ alors $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) = 0$.
Pour la réciproque supposons que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ vérifie $P(\alpha) = 0$ et montrons qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$.
Pour cela, on commence par remarquer que le résultat est vrai pour $\alpha = 0$. En effet $P(0) = a_0$, ainsi si $P(0) = 0$ alors

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k = X \sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1} = X \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} X^k = XQ(X).$$

Dans le cas général, introduisons le polynôme $\tilde{P}(X) = P(X + \alpha)$. On a $\tilde{P}(0) = P(\alpha) = 0$, donc d'après ce qui précède il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\tilde{P}(X) = XQ(X)$. Dès lors :

$$P(X) = P((X - \alpha) + \alpha) = \tilde{P}(X - \alpha) = (X - \alpha)Q(X - \alpha) = (X - \alpha)R(X)$$

Ainsi P est bien divisible par $X - \alpha$.

Exercice 6

1. Est-ce que $X - 1$ divise $P_1 = X^3 - 4X^2 + X + 2$?
2. Est-ce que $X + 1$ divise $P_2 = X^3 + 1$?

Corollaire 2
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ sont des racines deux à deux distinctes de P alors P est divisible par $(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_r)$

Démonstration : Puisque $P(\alpha_1)=0$, il existe $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X)=(X-\alpha_1)Q_1(X)$. Dès lors $P(\alpha_2)=(\alpha_2-\alpha_1)Q_1(\alpha_2)=0$ avec $\alpha_1 \neq \alpha_2$ donc $Q_1(\alpha_2)=0$. On en déduit qu'il existe $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q_1(X)=(X-\alpha_2)Q_2(X)$ et donc $P(X)=(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)Q_2(X)$. De proche en proche une récurrence montrerait finalement qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X)=(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_r)Q(X)$.

Remarque 24
De $P(X)=(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_r)Q(X)$ on tire que $\deg(P)=r+\deg(Q)\geq r$ (si $\deg(Q)\neq -\infty$ i.e. $Q \neq 0$ i.e. $P \neq 0$) d'où le résultat suivant :

Proposition 25
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 0$. Alors P a au plus n racines distinctes.

La contraposée de ce résultat est particulièrement utile :

Proposition 26
1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme de degré au plus n. Si P admet $n+1$ racines distinctes alors $P=0$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si P admet une infinité de racines alors $P=0$.

Exercice 7
1. Montrer que la fonction sinus n'est pas un polynôme.
2. On souhaite déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X)=P(X+1)$.
   (a) Soit P un tel polynôme. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)=P(0)$.
   (b) Que peut-on en déduire concernant le polynôme $Q(X)=P(X)-P(0)$?
   (c) Conclure.

3.3 Racines multiples

Dans le cas d'un trinôme du second degré de discriminant nul $P(X) = a(X-\alpha)^2$ on parle de *racine double*. Dans ce paragraphe, on généralise cette notion de multiplicité des racines des polynômes.

Définition 27
Soient $P \in \mathbb{R}[X], \alpha \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que $\underline{\alpha \text{ est racine de multiplicité } m \text{ de } P}$ lorsque :

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P(X) = (X-\alpha)^m Q(X) \quad \text{et} \quad Q(\alpha) \neq 0.$$

autrement dit lorsque $(X-\alpha)^m$ est la plus grande puissance de $(X-\alpha)$ qui divise P. On dit que α est une racine multiple de P lorsque $m \geq 2$.

Exemple 9 Si $P(X) = (X-1)^3(X-2)^2(X-3)$ alors :

Remarque 28
Attention, si $P(X) = (X-\alpha)^m Q(X)$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$, on ne peut pas en conclure que la multiplicité de α en tant que racine de P est égale à m : on peut seulement affirmer que cette multiplicité est *supérieure ou égale* à m.

Proposition 29
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ sont des racines deux à deux distinctes de P de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_r$ alors P est divisible par $(X-\alpha_1)^{m_1} \ldots (X-\alpha_r)^{m_r}$.

Démonstration : Admis.

Corollaire 3
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 0$. Alors P a au plus n racines comptées avec multiplicité.

Proposition 30
Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a : α est racine multiple de $P \iff P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$.

Démonstration : Admis.

Exercice 8

1. $(X+1)^2$ divise-t-il $P(X) = X^3 - X^2 - 5X - 3$?
2. $(X-2)(X+1)^2$ divise-t-il $Q(X) = X^5 - 2X^4 - 5X^3 + 10X^2 + 4X - 8$?

3.4 Factorisation de polynômes : utilisation de racines "évidentes"

Factoriser un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ c'est l'écrire sous la forme :

$$P(X) = a \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{m_k}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est le coefficient dominant de P, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sont les racines de P et $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}^*$ sont les multiplicités de ces racines.

Remarque 31
Attention, tous les polynômes ne sont pas factorisables sous cette forme. Par exemple, le polynôme $P(X) = X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle, on ne peut donc pas l'écrire sous la forme $P(X) = a(X - \alpha)(X - \beta)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dans le cas d'un polynôme de degré 2, $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, on connaît la formule pour déterminer les racines α_1, α_2 (réelles ou complexes, différentes ou non) de P (*cf* feuille de cours sur les trinômes).
Alors $\boxed{P(X) = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2).}$

Remarque 32
1. **Attention** à ne pas oublier le coefficient dominant a et les signes moins dans $X - \alpha_i$.
2. À nouveau, inutile d'utiliser le discriminant si $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec $b = 0$ ou $c = 0$. En effet, on a les factorisations suivantes :
   - $P(X) = aX^2 + bX =$
   - $P(X) = aX^2 + c =$

<u>Comment trouver rapidement la factorisation d'un polynôme ?</u>
Bien souvent, les exercices sont faits pour que les racines α des polynômes proposés soient "évidentes" c'est-à-dire simples, typiquement $\alpha \in \{-1, 1, 2, 0\}$.
Par exemple, si $P(X) = X^2 - 4X + 3$, il faut être capable de remarquer que $P(1) = 1 - 4 + 3 = 0$.
Ainsi P se factorise sous la forme : $P(X) =$
Pour trouver la valeur de la deuxième racine, on peut utiliser les relations coefficients racines :

Proposition 33 (relations coefficients racines)
- <u>Pour un polynôme de degré 2 :</u> Soit $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 2, c'est-à-dire tel que
  Si P se factorise sous la forme $P(X) = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$ alors on a : $\alpha_1\alpha_2 = \dfrac{c}{a}$ et $\alpha_1 + \alpha_2 = -\dfrac{b}{a}$.
- <u>Pour un polynôme de degré supérieur :</u> Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ un polynôme de degré n, c'est-à-dire tel que
  Si P se factorise sous la forme $P(X) = a_n(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\dots(X - \alpha_n)$ alors les coefficients a_k peuvent d'exprimer à l'aide des racines α_k. En particulier, le coefficient constant de P est $a_0 = \dfrac{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}{a_n}$.

Démonstration :

Par exemple, pour $P(X) = X^2 - 4X + 3$, on a vu que $P(X) = (X-1)(X-\alpha)$, on doit donc avoir $-1-\alpha =$ et $(-1)\times(-\alpha) =$ donc $\alpha =$ et donc, sans avoir à calculer le discriminant on trouve la factorisation : $P(X) =$

Exercice 9
Factoriser les polynômes suivants sans calculer le discriminant, et préciser leurs racines :

1. $P(X) = X^2 + 5X - 6$
2. $Q(X) = X^2 - 2X - 3$
3. $R(X) = 2X^2 - X - 1$
4. $S(X) = X^2 - 3X$
5. $T(X) = 4X^2 - 9$
6. $R(X) = X^3 - X$

Dans le cas de polynômes de degré supérieur, il faut trouver une racine α puis factoriser P par $X-\alpha$, on obtient $P(X)=(X-\alpha)Q(X)$ avec $\deg(Q)=\deg(P)-1$. Pour finir la factorisation de P il suffit alors de factoriser Q selon la même méthode.

Par exemple si $P=X^3-2X^2-X+2$, on remarque que $P(1)=1-2-1+2=0$ donc 1 est racine évidente de P.

On peut faire mieux en utilisant la multiplicité des racines. En effet, lorsqu'on repère une racine évidente α de P on sait que P est factorisable *a minima* par $X-\alpha$. Mais en fait, P est factorisable par $(X-\alpha)^2$ si α est

Déterminons la factorisation de $P(X)=X^3-3X+2$

Exercice 10
Factoriser les polynômes suivants :

1. $P_1(X) = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 8X - 4$.
2. $P_2(X) = X^5 - 3X^4 - 2X^3 + 6X^2 + X - 3$.
3. $P_3(X) = X^3 - 5X^2 + 3X + 9$
4. $P_4(X) = 2X^4 - 6X^3 - 6X^2 + 22X - 12$.
5. $P_5(X) = 10X^6 - 50X^4 + 40X^2$