BCPST 1B **Interro 10 (sujet A) :** **/10 pts** **2024-2025**

NOM :

PRENOM :

Question 1 (/1 pt). Dériver la fonction suivante. On ne demande pas de préciser l'ensemble de dérivabilité.

$$f : x \longmapsto (\ln(x+1))^5$$

$f'(x) = 5u'(x)u^4(x)$ où $u(x) = \ln(x+1)$ donc $u'(x) = \frac{1}{x+1}$

donc $f'(x) = \frac{5(\ln(x+1))^4}{x+1}$.

Question 2 (/2 pts). Développer rapidement et simplifier pour $a \in \mathbb{R}^*$ la quantité $\left(a - \frac{1}{a}\right)^3$.

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)^3 = 1a^3\left(-\frac{1}{a}\right)^0 + 3a^2\left(-\frac{1}{a}\right)^1 + 3a^1\left(-\frac{1}{a}\right)^2 + 1a^0\left(-\frac{1}{a}\right)^3$$

$$= a^3 - 3a + \frac{3}{a} - \frac{1}{a^3}$$

Question 3 (/7 pts). Calculer les sommes suivantes pour $p \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{2n-k}$ | 2. $S_2 = \sum_{k=1}^{n} (1-p)p^{k-1}$ | 3. $S_3 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k}$ | 4. $S_4 = \sum_{\cancel{0 \leq i,j \leq n}} 2^{i+j}$ $0 \leq i \leq j \leq n$

1) $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^n 2^{n-k} = 2^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 2^{n-k} = 2^n(1+2)^n = 6^n$

2) $S_2 = p \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} = p \sum_{j=0}^{n-1} (1-p)^j = p \times \frac{1-(1-p)^{n-1+1}}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^n$

3) $S_3 = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 1^k 1^{n+1-k} - 2 = 2^{n+1} - 2$

4) $S_4 = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} 2^i \times 2^j = \sum_{j=0}^{n} 2^j \sum_{i=0}^{j} 2^i = \sum_{j=0}^{n} 2^j \frac{1-2^{j+1}}{1-2}$

$= \sum_{j=0}^{n} 2^j(2^{j+1}-1) = \sum_{j=0}^{n} 2 \times 2^{2j} - 2^j = 2\sum_{j=0}^{n} 4^j - \sum_{j=0}^{n} 2^j$

$= 2\frac{1-4^{n+1}}{1-4} - \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \frac{2}{3}(4^{n+1}-1) + 1 - 2^{n+1} = \frac{2}{3}4^{n+1} - 2^{n+1} + \frac{1}{3}$

BCPST 1B **Interro 10 (sujet B) : /10 pts** **2024-2025**

NOM :

PRENOM :

Question 1 (/1 pt). Dériver la fonction suivante. On ne demande pas de préciser l'ensemble de dérivabilité.

$$g : x \longmapsto \frac{1}{x\ln(x)}$$

$g'(x) = -\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$ où $u(x) = x\ln(x)$ donc $u'(x) = \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$

donc $g'(x) = -\dfrac{\ln(x)+1}{(x\ln(x))^2}$

Question 2 (/2 pts). Développer rapidement et simplifier pour $b \in \mathbb{R}^*$ la quantité $\left(b + \dfrac{1}{b}\right)^4$.

$$\left(b+\frac{1}{b}\right)^4 = 1b^4\left(\frac{1}{b}\right)^0 + 4b^3\left(\frac{1}{b}\right)^1 + 6b^2\left(\frac{1}{b}\right)^2 + 4b^1\left(\frac{1}{b}\right)^3 + 1b^0\left(\frac{1}{b}\right)^4$$

$$= b^4 + 4b^2 + 6 + \frac{4}{b^2} + \frac{1}{b^4}$$

Question 3 (/7 pts). Calculer les sommes suivantes pour $p \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(1-p)\,p^{k-1}$ | 2. $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}$ | 3. $S_3 = \displaystyle\sum_{k=-1}^{n-1}\binom{n}{k+1}2^k$ | 4. $\cancel{S_4 = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} ij}$ $S_4 = \displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} j^2$

1) $S_1 = p\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(1-p)^{k-1} = p\sum_{j=0}^{n-1}(1-p)^j = p \times \frac{1-(1-p)^{n-1+1}}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^n$

2) $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k - (-1)^0\binom{n+1}{0} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k 1^{n+1-k} - 1$

$= (-1+1)^{n+1} - 1 = -1$

3) $S_3 = \displaystyle\sum_{k=-1}^{n-1}\binom{n}{k+1}2^k = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^{j-1} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j 1^{n-j} = \frac{3^n}{2}$

4) $S_4 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} j^2 = \sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

n.b : Pensez à ajouter la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ aux formules à apprendre par coeur (même si elle est moins souvent utile que celles pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$)