TD5 exo 5

1) On a $u_2 = u_1 \times \dfrac{\pi 1^2}{3\times 4} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\pi \times 1^2}{3\times 4} = \dfrac{\pi \times 1^2}{2\times 3\times 4}$

$$u_3 = u_2 \times \frac{\pi \times 2^2}{5\times 6} = \frac{\pi \times 1^2 \times \pi \times 2^2}{5\times 6 \times 2\times 3\times 4} = \frac{\pi^2 \times 1^2 \times 2^2}{2\times 3\times 4\times 5\times 6}$$

$$u_4 = u_3 \times \frac{\pi \times 3^2}{7\times 8} = \frac{\pi^3 \times 1^2 \times 2^2 \times 3^2}{2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8}$$

Il semble que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\pi^{n-1} \times 1^2 \times 2^2 \times \dots \times (n-1)^2}{2\times 3\times 4\times \dots \times 2n}$

c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\pi^{n-1} \times (n-1)!^2}{(2n)!}$

2) Démontrons-le par récurrence.

$\underline{I}$: pour $n=1$, $\dfrac{\pi^{1-1} \times (1-1)!^2}{(2\times 1)!} = \dfrac{1}{2} = u_1$ OK

$\underline{H}$: si $u_n = \dfrac{\pi^{n-1}(n-1)!^2}{(2n)!}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ alors

$$u_{n+1} = u_n \times \frac{\pi n^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi^{n-1} \times (n-1)!^2 \times \pi \times n^2}{(2n)! \times (2n+1)\times(2n+2)}$$

$$= \frac{\pi^n \times ((n-1)! \times n)^2}{(2n)! \times (2n+1) \times (2n+2)}$$

$$= \frac{\pi^n \times n!^2}{(2n+2)!}$$

$$= \frac{\pi^{(n+1)-1} \times ((n+1)-1)!^2}{(2(n+1))!}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi on a bien montré que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\pi^{n-1}(n-1)!^2}{(2n)!}$