Exercice 1
Écrire les nombres complexes suivants sous la forme $a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$:

1. $(1+i)(3-2i)$
2. $i(2-i)$
3. $(3i)^2$
4. $\overline{2(1-i)} - i(2i-1)$
5. $\overline{(2-i)(2+i)}$
6. $(2\sqrt{2}-\sqrt{3}i)(\sqrt{3}i+\sqrt{2})$

Exercice 2
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $(1+i)\,\overline{(3-i)}$
2. $\dfrac{1}{4-i}$
3. $\dfrac{1}{(1-i)^2}$
4. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$
5. $\overline{\left(\dfrac{1}{2i+4}\right)}$

Exercice 3
Placer dans le plan les points d'affixes suivantes :

1. $2-3i$
2. $1+\frac{1}{2}i$
3. -3
4. $-2i$
5. $2e^{i\pi/3}$
6. $\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

Exercice 4
En utilisant que $i^2=-1$, combien valent les puissances de i suivantes ?

$$i^3 \quad , \quad i^4 \quad , \quad i^5 \quad , \quad i^6 \quad , \quad i^{-2} \quad , \quad i^{-1}$$

Exercice 5

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, combien vaut $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3}$?
2. Simplifiez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(1+i)^k$.
3. Simplifiez $\displaystyle\sum_{k=0}^{9} i^k(i-1)$.

Exercice 6
Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + \dfrac{9}{4} = 0$
2. $z^3 + 2z = 0$
3. $2z^2 + z + 1 = 0$
4. $z^4 + z^2 - 12 = 0$
5. $z^4 = 1$

Exercice 7
Écrire les nombres suivants sous forme exponentielle :

1. $z_1 = 1+i$
2. $z_2 = 2-2i$
3. $z_3 = -1+i\sqrt{3}$
4. $\dfrac{z_1}{z_3}$
5. $\overline{z_2} \times z_1$
6. $z_4 = \dfrac{1+i}{2-2i}$
7. $z_5 = -1-i\sqrt{3}$
8. $z_6 = (-1+i\sqrt{3})^6$
9. $z_7 = \dfrac{(-3+3i)^3}{\sqrt{3}+3i}$
10. $z_8 = \dfrac{1}{1-i}$
11. $z_9 = -i$
12. $z_{10} = -2$

Exercice 8

1. Déterminer tous les nombres complexes z tels que $\dfrac{z+2i}{z-4i} \in \mathbb{R}$.
2. On suppose que $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ vérifie $|z| = 1$. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur.
3. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $u \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, montrer que $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \iff (|u| = 1 \text{ ou } z \in \mathbb{R})$.

Exercice 9

Montrer que le produit de deux nombres qui sont sommes de deux carrés d'entiers l'est aussi.

Exercice 10

1. Si $\omega \in \mathbb{C}$, rappeler l'expression de $|\omega|^2$ en fonction de ω et de son conjugué.
2. Démontrer que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ on a
$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$
3. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes fixés. Faire un dessin et y placer :
   (a) un point M d'affixe z (choisir z quelconque !),
   (b) un point M' d'affixe z' (choisir z' quelconque !),
   (c) un point A d'affixe $z+z'$,
   (d) un point B d'affixe $z-z'$.
4. À quelle identité géométrique correspond l'égalité de la question 2 ?

Exercice 11

1. Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
   (a) Exprimez $\mathcal{R}e(z-1)$ et $\mathcal{I}m(z-1)$ en fonction de x et y.
   (b) Exprimez $\mathcal{R}e(z-i)$ et $\mathcal{I}m(z-i)$ en fonction de x et y.
   (c) En déduire les expressions de $|z-1|$ et $|z-i|$.
2. Résoudre l'équation $|z-i| = |z-1|$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
3. (a) Placer un point A d'affixe 1 et un point B d'affixe i sur un dessin.
   (b) Si M est un point d'affixe z, à quoi corresondent géométriquement les quantités $|z-1|$ et $|z-i|$?
   (c) Retrouver géométriquement le résultat de la question 2.

Exercice 12

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On proposera deux solutions : une approche algébrique (c'est-à-dire par le calcul) et une approche géométrique.

1. $|z+1+i| = |z+1-i|$
2. $|z-i| = |z-2-i| = \sqrt{2}$
3. $|z-\overline{z}| \leq 1$
4. $|z+1| > |z-i|$