Programme de colles : semaine 10, du 2/12 au 6/12

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Polynômes réels

On évitera les exercices trop abstraits. Sont hors programme en BCPST 1ère année : le théorème de d'Alembert Gauss, la division euclidienne de polynômes, la factorisation en produits d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

- *on appelle polynôme toute fonction polynomiale, on note X la fonction $x \longmapsto x$*
- unicité des coefficients
- opérations : somme, produit, composition, dérivées successives
- degré. Par convention, $\deg(0) = -\infty$. Degré d'une somme, d'un produit, d'une dérivée.
- notations $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$
- divisibilité et racines. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a : α est racine de P ssi $X - \alpha$ divise P $(*)$
- un polynôme de degré n admet au plus n racines, seul le polynôme nul admet une infinité de racines.
- racines multiples, ordre de multiplicité. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a : α est racine multiple de P ssi $(X - \alpha)^2$ divise P ssi $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$. *La caractérisation de l'ordre de multiplicité via les dérivées n'est pas un attendu du programme de BCPST.*
- factorisation de polynômes de petit degré en utilisant des racines évidentes.

2 Nombres complexes

L'utilisation des nombres complexes pour résoudre des problèmes de géométrie n'est pas un objectif du programme. On utilisera en revanche l'interprétation géométrique pour illustrer des calculs algébriques.

Attention *: seule la définition de $e^{i\theta}$ a été abordée en classe pour l'instant (aucune règle de calcul sur les exponentielles complexes n'a encore été abordée). L'inégalité triangulaire n'a pas encore été vue en classe.*

- forme algébrique, parties réelle et imaginaire
- résolution dans $\mathbb{C}$ d'équations polynomiales de degré 2 à coefficients réels. *Les élèves ne doivent pas utiliser le discriminant pour résoudre $z^2 = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.*
- conjugaison, règles de calcul
- calcul de la forme algébrique d'un quotient
- notion d'affixe d'un point du plan, interprétation géométrique de la somme, de l'opposé, du conjugué
- module : définition, règles de calcul, le module coïncide avec la valeur absolue sur $\mathbb{R}$, interprétation géométrique : si A et B sont d'affixes z_A et z_B alors $AB = |z_A - z_B|$.
- forme trigonométrique, argument, notation exponentielle. *Vocabulaire : on ne fait pas de distinction entre formes trigonométrique, polaire et exponentielle.*

3 Suites usuelles

- suites récurrentes linéaires d'ordre 2 dans le cas d'un discriminant du polynôme caractéristique strictement négatif

4 Informatique en langage Python

Attention, les indices des éléments d'une liste n'ont pas été abordés en classe. Modification et suppression d'éléments seront également vus plus tard.

Listes :

- création par `append` successifs depuis la liste vide, création par la syntaxe `[f(k) for k in L]` où `L` est une autre liste ou un range
- parcours d'une liste par ses éléments
- fonction `sum` : *on recommande aux élèves d'utiliser* `sum` *lorsqu'apparaît la somme des éléments d'une liste déjà disponible, et de revenir à une boucle* `for` *sinon.*
- fonctions `len`, test `in`, concaténation de listes

5 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Donner la définition du degré d'un polynôme et énoncer la formule donnant le degré d'un produit.
2. Énoncer le théorème faisant le lien entre racine d'un polynôme et factorisation. *On attend le théorème* $(*)$ *et on s'assurera que les élèves connaissent la définition de "racine" et de "divise".*
3. Factoriser un polynôme de degré 3 ou 4 en utilisant une ou des racines évidentes. *Note aux colleurs : on proposera uniquement des polynômes scindés sur* $\mathbb{R}$.
4. Résoudre sur $\mathbb{C}$ une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels choisie par l'examinateur.
5. Donner la définition du conjugué $\overline{z}$ de $z \in \mathbb{C}$ puis démontrer que : $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$, puis encore que : $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
6. Si $z \in \mathbb{C}$, donner la définition de $\overline{z}$ et de $|z|$. Si M est un point du plan d'affixe z, comment construire le point M' d'affixe $\overline{z}$? à quoi correspond géométriquement $|z|$?
7. Déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe simple choisi par l'examinateur.
8. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n où (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (cas $\Delta < 0$) choisie par l'examinateur.
9. Écrire une fonction Python prenant en argument un entier n et renvoyant la liste $[u_0, u_1, u_2, \dots, u_n]$ où (u_n) est une suite de réels choisie par l'examinateur du type $u_n = f(n)$ ou $u_{n+1} = f(u_n)$ ou $u_{n+1} = f(u_n, n)$.
10. Écrire une fonction Python `minimum` prenant en argument une liste de nombres réels et renvoyant le minimum de cette liste. *On admettra que le premier élément d'une liste* `L` *est donné par* `L[0]`.
11. Rappeler la définition de la moyenne et de l'écart type d'une série $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de nombres réels. Écrire deux fonctions Python prenant en argument une liste de nombres réels et renvoyant respectivement leur moyenne et leur écart-type *(cf TP 9)*.

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type remédiation" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiation 6, exos 1 et 4 : `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=5444`

La question de cours est notée sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.