Feuille de cours 7 : applications des nombres complexes à la trigonométrie

La forme polaire d'un nombre complexe $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ fait apparaître le cosinus et le sinus de θ à travers ses parties réelle et imaginaire :

$$\mathcal{R}e(re^{i\theta}) = \qquad\qquad \text{et } \mathcal{I}m(re^{i\theta}) =$$

Rappelons que les fonctions $\mathcal{R}e$ et $\mathcal{I}m$ satisfont les relations suivantes, qui peuvent s'avérer utiles pour obtenir des expressions trigonométriques à partir de parties réelles et imaginaires d'exponentielles complexes :

- $\mathcal{R}e(re^{i\theta} + r'e^{i\theta'}) =$
- $\mathcal{I}m(re^{i\theta} + r'e^{i\theta'}) =$
- Si $\lambda \in$, $\mathcal{R}e(\lambda z) = \lambda \mathcal{R}e(z)$ et $\mathcal{I}m(\lambda z) = \lambda \mathcal{I}m(z)$
- $\mathcal{R}e(iz) =$ et $\mathcal{I}m(iz) =$

démonstration de la dernière propriété :

1 Formule d'Euler et linéarisation

Malgré tout, revenir sans cesse à une partie réelle ou imaginaire n'est pas très aisé dans les calculs, notamment pour les produits puisque

Pour remédier à cela, on dispose des formules d'Euler, exprimant cos et sin comme sommes d'exponentielles complexes :

Proposition 1 (Formules d'Euler)
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

démonstration :

Attention à ne pas oublier le $2i$ au dénominateur pour le sinus. Si vous étudiez une expression réelle, pensez à vérifier que votre résultat final est bien réel lui aussi !

Les formules d'Euler permettent de retrouver plus facilement les formules transformant les produits de cosinus et de sinus en sommes de cosinus et de sinus. On dit qu'on *linéarise* l'expression. Par exemple, pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.
En effet :

$$\cos(a)\cos(b) =$$

De même, les formules d'Euler permettent de *linéariser* des produits de cosinus et de sinus de la forme $\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$ pour $p, q \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire de les écrire sous la forme de sommes de $\cos(k\theta)$ et de $\sin(k\theta)$ pour $k \in \mathbb{N}$. On développe pour cela les expressions

$$\cos^p(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^p \quad \text{et} \quad \sin^q(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^q.$$

Par exemple, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos^3(\theta) =$$

Exercice 1
Linéariser $\cos^2(\theta)\sin(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

2 Factorisation par l'angle moitié

On a déjà mentionné qu'obtenir la forme polaire d'une *somme* de deux nombres complexes n'est pas forcément évident. Il existe toutefois une astuce précieuse dans le cas où les deux nombres complexes en question sont de module 1, c'est-à-dire de la forme $e^{i\theta}$ et $e^{i\theta'}$ avec $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

Cette astuce consiste à factoriser par $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$ (on dit qu'on "factorise par l'angle moitié", même si l'expression "angle moyen" serait plus adaptée). Voici comment elle se met en place : pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ on écrit :

$$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)$$

$$=$$

Remarque : Cette dernière expression n'est pas exactement la forme polaire de $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$ puisque

En prenant les parties réelles et imaginaires de chaque côté de cette égalité, on trouve qu'on a les formules trigonométriques suivantes :

$$\cos(\theta) + \cos(\theta') =$$
$$\sin(\theta) + \sin(\theta') =$$

Exercice 2
En appliquant la même méthode à $e^{i\theta} - e^{i\theta'}$, exprimez $\cos(\theta) - \cos(\theta')$ et $\sin(\theta) - \sin(\theta')$ sous forme d'un produit de sinus et de cosinus.

Exercice 3
En effectuant une factorisation par l'angle moitié, donner la forme trigonométrique de $1 - e^{i\theta}$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$. Simplifier ensuite l'expression $\dfrac{1 - e^{i\theta'}}{1 - e^{i\theta}}$ pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ (avec $\theta \neq$

3 Formule de Moivre et sommes

Proposition 2 (Formule de Moivre)
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

démonstration :

En développant la puissance n, on obtient une expression de $\cos(n\theta)$ et de $\sin(n\theta)$ sous la forme d'une somme de puissances de sinus et de cosinus. C'est le procédé inverse de la linéarisation (on parle parfois de délinéarisation). Par exemple pour $n = 3$:

$$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3$$

donc $\cos(3\theta) =$
et $\sin(3\theta) =$.

La formule de Moivre permet enfin de faire apparaître une puissance entière d'un nombre complexe : $\left(e^{i\theta}\right)^n$ là où une expression en $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ serait plus difficile à appréhender, par exemple dans des sommes trigonométriques :

Exercice 4
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.