Programme de colles : semaine 11, du 9/12 au 13/12

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Polynômes réels

On évitera les exercices trop abstraits. Sont hors programme en BCPST 1ère année : le théorème de d'Alembert Gauss, la division euclidienne de polynômes, la factorisation en produits d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Reprise du programme précédent.

2 Nombres complexes

L'utilisation des nombres complexes pour résoudre des problèmes de géométrie n'est pas un objectif du programme. On utilisera en revanche l'interprétation géométrique pour illustrer des calculs algébriques.

Attention *: la factorisation par l'angle moitié et le calcul de sommes trigonométriques n'ont pas encore été abordés en classe.*

- forme algébrique, parties réelle et imaginaire
- résolution dans $\mathbb{C}$ d'équations polynomiales de degré 2 à coefficients réels. *Les élèves ne doivent pas utiliser le discriminant pour résoudre $z^2 = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.*
- conjugaison, règles de calcul
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$, $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$
- calcul de la forme algébrique d'un quotient
- notion d'affixe d'un point du plan, interprétation géométrique de la somme, de l'opposé, du conjugué
- module : définition, règles de calcul, le module coïncide avec la valeur absolue sur $\mathbb{R}$, interprétation géométrique : si A et B sont d'affixes z_A et z_B alors $AB = |z_A - z_B|$.
- inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$. *Le cas d'égalité et le corollaire permettant de minorer $|z - z'|$ n'ont pas été abordés en classe.*
- forme trigonométrique, argument, notation exponentielle, règles de calculs et interprétation géométrique. *Vocabulaire : on ne fait pas de distinction entre formes trigonométrique, polaire et exponentielle.*
- pour $r, r' \in \mathbb{R}^+$ et $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$: $e^{i\theta} = e^{i\varphi} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \ : \ \theta = \varphi + 2k\pi$
- formules d'Euler. Application à la linéarisation de produits de cosinus et sinus
- exponentielle complexe : pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ on définit $e^z = e^x e^{iy}$
- résolution de $z^2 = w$ pour $w \in \mathbb{C}$ en passant par la forme polaire ou par la forme algébrique de z. Exemples de résolutions de $z^n = w$ en passant par la forme polaire de z. *Aucun résultat sur les racines n-ème de l'unité n'a été énoncé en classe.*

3 Suites usuelles

- suites récurrentes linéaires d'ordre 2 dans le cas d'un discriminant du polynôme caractéristique strictement négatif

4 Informatique en langage Python

Attention, les indices des éléments d'une liste n'ont pas été abordés en classe. Modification et suppression d'éléments seront également vus plus tard.

Listes : *Reprise du programme précédent.*
Bibliothèques :

- on recommande la syntaxe `import bibli as alias`
- bibliothèques `numpy` et `matplotlib.pyplot`
- savoir tracer le graphe d'une fonction ou d'une suite de nombres réels. *La fonction `linspace` n'a pas été abordée en classe. Les élèves doivent savoir définir une liste d'abscisses du type `[a + k*(b-a)/N for k in range(N+1)]`*

5 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Factoriser un polynôme de degré 3 ou 4 en utilisant une ou des racines évidentes. *Note aux colleurs : on proposera uniquement des polynômes scindés sur* $\mathbb{R}$.
2. Résoudre sur $\mathbb{C}$ une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels choisie par l'examinateur.
3. Donner la définition du conjugué $\overline{z}$ de $z \in \mathbb{C}$ puis démontrer que : $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$, puis encore que : $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
4. Si $z \in \mathbb{C}$, donner la définition de $\overline{z}$ et de $|z|$. Si M est un point du plan d'affixe z, comment construire le point M' d'affixe $\overline{z}$? à quoi correspond géométriquement $|z|$?
5. Déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe z simple choisi par l'examinateur et illustrer le résultat en plaçant le point M d'affixe z sur un schéma.
6. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n où (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (cas $\Delta < 0$) choisie par l'examinateur.
7. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$.
8. Résoudre sur $\mathbb{C}$: $z^2 = w$ où $w \in \mathbb{C}$ est une constante choisie par l'examinateur. *On précisera aux élèves si on souhaite qu'ils cherchent z sous forme algébrique ou polaire.*
9. Énoncer et démontrer les formules d'Euler.
10. Écrire un programme Python permettant de tracer le graphe d'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ choisie par l'examinateur.
11. Écrire un programme Python permettant de tracer u_n en fonction de n où (u_n) est une suite définie par récurrence choisie par l'examinateur.

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type remédiation" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiation 6, exos 1 et 4 : `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=5444`

La question de cours est notée sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.