Feuille de cours 0.3 : méthodes de preuves

Dans tout ce document, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ désignent des assertions et E un ensemble. On décrit différents types de raisonnements pour démontrer des propriétés.

1 Pour prouver que $\exists x \in E : \mathcal{P}(x)$

Pour prouver une telle assertion il suffit d'exhiber un élément $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{P}(x_0)$ soit vraie. Il n'est en fait même pas besoin d'expliquer comment on a trouvé x_0. Une rédaction appropriée contient une phrase du type “Posons $x_0 = \dots$” et une vérification du fait que $\mathcal{P}(x_0)$ est vraie.

Exercice 1
Montrer que : $\exists n \in \mathbb{N} \ : \ n^2 > n + 100$.

Remarquons que c'est aussi ce principe qui est à la base d'une preuve par contre-exemple. Pour montrer qu'une assertion du type $(\forall x \in E, \ \mathcal{P}(x))$ est *fausse*, il faut montrer que l'assertion $(\exists x \in E \ : \ \text{NON}(\mathcal{P}(x)))$ est vraie, c'est-à-dire exhiber *un contre-exemple*.

Exercice 2
Montrer que l'assertion : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ \sqrt{x} \geq x$ est fausse.

C'est encore ce principe qui permet de montrer qu'une implication entre deux assertions dépendant de variables est *fausse*. En effet, l'implication $\mathcal{P}(x) \implies \mathcal{Q}(x)$ est vraie lorsque : pour tout $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie, $\mathcal{Q}(x)$ est encore vraie. Pour montrer que $\mathcal{P}(x) \not\Longrightarrow \mathcal{Q}(x)$ il faut donc montrer que :

Exercice 3
Que faudrait-il faire pour prouver que j'ai tort d'affirmer que : “les élèves qui font des maths sont heureux” ?

Exercice 4
Montrer que l'implication suivante, à propos de deux nombres réels x, y, est fausse :

$$xy \geq 1 \implies (x \geq 1 \text{ et } y \geq 1)$$

2 Pour prouver que $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$

Pour prouver une telle assertion, il n'est pas suffisant de montrer que $\mathcal{P}(x_0)$ est vraie pour un certain $x_0 \in E$. Il s'agit bien de prouver que pour n'importe quel $x \in E$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie. Pour cela, une rédaction usuelle commence donc par "prendre" un élément x de E en déclarant : "Soit $x \in E$". Cette valeur (quelconque) de x étant fixée, on démontre alors $\mathcal{P}(x)$.

Exercice 5

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4x \geq -4$.
2. Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et pour tout $A > 0$ la fonction $g : t \longmapsto f(At) - f(-At)$ est impaire.

C'est ce raisonnement qu'il faut appliquer pour prouver qu'une implication est vraie.

Exercice 6

Montrer que l'implication suivante, à propos de deux nombres réels x, y, est vraie :

$$(x \geq 1 \text{ et } y \geq 1) \implies x^2 + y^2 \geq 2$$

L'implication réciproque est-elle vraie ?

3 Par double implication

Pour prouver l'équivalence ($\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$), on utilise souvent le fait que cela est logiquement équivalent à (($\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$) ET ($\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}$)). On "fait les deux sens".

Exercice 7
Pour $x \in \mathbb{R}$ montrer que : $x \in \mathbb{Q} \iff 1 + x \in \mathbb{Q}$.

Souvent, parmi les deux implications, il y a un sens "facile" :

Exercice 8
Pour $a, b \in \mathbb{R}$ montrer que : $a = b \iff (a+b)^3 = 8a^3$.

4 Par contraposition

Rappel : La contraposée de l'implication $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est :
Une implication et sa contraposée ont toujours la même valeur de vérité.
Attention à ne pas confondre la contraposée avec l'implication réciproque i.e. avec

Exercice 9
Soient $\mathcal{P}$: "j'habite en France" et $\mathcal{Q}$:"j'habite à Paris". À quelles implications correspondent les phrases suivantes ? Indiquer lesquelles sont contraposées et lesquelles sont réciproques. Préciser leurs valeurs de vérité.

1. Si j'habite à Paris alors j'habite en France.
2. Si j'habite en France alors j'habite à Paris.
3. Si je n'habite pas en France alors je n'habite pas à Paris.
4. Si je n'habite pas à Paris alors je n'habite pas en France.

Pour prouver l'implication ($\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$), on peut choisir de prouver plutôt l'implication contraposée (NON($\mathcal{Q}$) $\implies$ NON($\mathcal{P}$)) qui lui est logiquement équivalente.

Exercice 10
Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer par contraposée que si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice 11
Soit x un nombre réel. Montrer par contraposée qu'on a :

$$(\forall \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon) \implies x \quad 0$$

5 Par l'absurde

Pour prouver qu'une assertion $\mathcal{P}$ est vraie, on peut supposer qu'elle est fausse (c'est-à-dire supposer qu'on a NON($\mathcal{P}$)) et montrer que cela engendre une contradiction.

Exercice 12
Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 13
Démontrer par l'absurde que 0 n'a pas d'inverse, c'est-à-dire que l'équation $x \times 0 = 1$ n'a pas de solution réelle x.

Le raisonnement par l'absurde est souvent confondu avec le raisonnement par contraposition. Pour distinguer les deux, notons tout d'abord qu'on peut raisonner par l'absurde pour prouver n'importe quel type d'assertion $\mathcal{P}$, tandis que le principe de contraposition ne s'applique qu'aux preuves d'implications $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$.

Malgré tout, il est licite de procéder par l'absurde pour prouver une implication $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$. On fait alors l'hypothèse qu'on a :

$$\text{NON}(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \ \text{ i.e.}$$

et on cherche à aboutir à une contradiction. On s'assurera toutefois d'avoir vraiment besoin de passer par là pour faire cette preuve. En effet, la façon d'obtenir la contradiction souhaitée peut révéler qu'en fait il était inutile de procéder ainsi :

- Supposons qu'on obtienne la contradiction en montrant que : puisqu'on a $\mathcal{P}$ alors on a $\mathcal{Q}$, ce qui est incompatible avec NON($\mathcal{Q}$). Alors c'est qu'en fait on sait prouver directement que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$! Inutile de raisonner par l'absurde ici.
- Supposons qu'on obtienne la contradiction en montrant que : puisqu'on a NON($\mathcal{Q}$) alors on a NON($\mathcal{P}$), ce qui est incompatible avec $\mathcal{P}$. Alors on sait prouver que NON($\mathcal{Q}$) implique NON($\mathcal{P}$) donc il s'agit d'un raisonnement par contraposée ! Inutile de raisonner par l'absurde ici.
- Enfin, si on obtient la contradiction en utilisant à la fois qu'on a $\mathcal{P}$ et NON($\mathcal{Q}$), alors c'est que le raisonnement par l'absurde était probablement justifié ici.

On retiendra qu'il ne faut pas abuser du raisonnement par l'absurde. Préférez toujours les preuves directes, elles sont souvent plus simples à présenter et à lire.

6 Par analyse-synthèse

Il s'agit d'une méthode permettant de montrer l'existence d'un objet résolvant un problème. C'est un raisonnement constitué de deux parties :

- L'analyse : on suppose d'abord qu'il existe une solution au problème qu'on considère, et on en déduit des propriétés que doit avoir cet objet. Après accumulation de beaucoup de propriétés, il ne reste que quelques candidats pour être solution.
- La synthèse : on vérifie lesquels des objets candidats trouvés à l'étape précédente sont effectivement solution du problème.

Dans le cas particulier où à la fin de l'analyse il ne reste qu'un seul candidat solution, et si ce candidat est effectivement solution, alors ce raisonnement prouve existence *et unicité* de la solution du problème.

Exercice 14
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer par analyse-synthèse qu'il existe une unique fonction paire $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une unique fonction impaire $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f = f_1 + f_2$.

7 Par récurrence

On renvoie à la feuille de cours 0.2. On rappelle que les récurrences sont une technique de preuve pour montrer un énoncé du type :

8 Entraînement

Exercice 15
Vrai ou Faux ? Donner une preuve ou un contre-exemple.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > x$
2. $\exists x \in \mathbb{R}\ :\ x^2 > x$
3. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R}\ :\ x \geq y.$
4. $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z - z'| \leq |z| - |z'|$

Exercice 16
Soient x et y deux nombres réels. Pour chacune des implications suivantes, donner la contraposée, la réciproque, et la contraposée de la réciproque. Parmi toutes ces implications, lesquelles sont vraies pour tous x et y réels ?

1. $x \in \mathbb{Q} \implies x^2 \in \mathbb{Q}$
2. $x^2 > 1 \Longrightarrow x > 1$
3. $x > y \Longrightarrow x^2 > y^2$
4. $x^2 + y^2 = 0 \implies x = y = 0$

Exercice 17
Pour $n \in \mathbb{Z}$, montrer que n^2 est pair si et seulement si n est pair. En déduire que n^2 est impair si et seulement si n est impair.

Exercice 18
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'entier $n(n+1)$ est pair.

Exercice 19
Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair.

Exercice 20
Soit $D = \{(0,1), (1,0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$ tels que $D = A \times B$.

Exercice 21 (*)
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(y - f(x)) = 2 - x - y$.