Mathématiques - mercredi 11 décembre 2024
Devoir n$^{\text{o}}$4 Durée : 3 h

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Les qualités de rédaction (clarté des raisonnements, lisibilité, orthographe...) seront sensiblement prises en considération dans l'évaluation des copies.**
- **Le sujet comporte 3 pages et 6 exercices.**
- **⚠ Consignes de présentation non respectées = -1 point sur la note finale. ⚠**
- **⚠ L'exercice 1 est à faire sur une copie séparée. ⚠**

Exercice 1 (Informatique)**.**
Une classe de BCPST étudie une nouvelle bactérie. Chaque élève reçoit une boîte de Pétri contenant 10 bactéries et doit compter le nombre de bactéries qu'elle contient au bout d'une semaine. Les résultats de la classe sont stockés dans une liste Python `L` : la k-ème valeur de `L` est égale au nombre de bactéries dans la boîte de Pétri du k-ème élève après une semaine.

1. Écrire une fonction `moy` prenant en argument la liste `L` et renvoyant sa moyenne.

On se demande si la population de bactéries a augmenté dans toutes les boîtes de Pétri, c'est-à-dire si les éléments de la liste `L` sont tous supérieurs à 10.

2. Écrire une fonction `tousplus` prenant en argument `L` et renvoyant `True` si tous les éléments de `L` sont supérieurs à 10 et `False` sinon.

Pour visualiser les mesures faites par la classe, on souhaite afficher les valeurs de `L` sur un graphique.

3. Écrire une fonction `trace` prenant en argument la liste `L` et représentant la mesure faite par l'élève numéro k en fonction de k. *Votre fonction ne renverra rien mais affichera un graphe à son exécution.*

On obtient un graphe dans lequel on constate qu'en fait, certaines mesures ont révélé une croissance de la population x de bactéries ($x > 10$) quand d'autres ont révélé une décroissance de cette population ($x < 10$). On souhaite séparer ces deux groupes de données.

4. Écrire une fonction `separe` prenant en argument la liste `L` et renvoyant deux listes $\mathtt{L}_+$ et $\mathtt{L}_-$ contenant respectivement les éléments de `L` supérieurs à 10 et ceux inférieurs strictement à 10. Par exemple, si `L = [21, 8, 10, 13, 5]` alors `separe(L)` doit renvoyer les listes $\mathtt{L}_+$ `= [21, 10, 13]` et $\mathtt{L}_-$ `= [8, 5]`.
5. Déduire des questions précédentes une fonction `moy_bis` prenant en argument `L` et renvoyant les nombres m_+ et m_- où m_+ (respectivement m_-) est la moyenne des mesures de `L` supérieures (respectivement strictement inférieures) à 10.

Exercice 2 (cours)**.**

1. Énoncer et démontrer la formule de symétrie des coefficients binomiaux.
2. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$. *On pourra utiliser sans démonstration que :* $\forall z \in \mathbb{C},\ Re(z) \leq |z|$.

Exercice 3 (calculs)**.**

1. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} 2^k$.
2. Factoriser le polynôme $P(X) = X^3 + 3X^2 - 9X + 5$.
3. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, linéariser $\cos^3(\theta)\sin(\theta)$.

Exercice 4 (type TD)**.**
Les 2 questions sont indépendantes.

1. (a) Déterminer trois nombres réels a, b, c tels que : $\forall k \geq 2,\ \dfrac{k-5}{k(k^2-1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k-1} + \dfrac{c}{k+1}$.

   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$ pour $n \geq 2$.
2. On considère les nombres complexes

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = 1 - i \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

   (a) Déterminer la forme exponentielle de z_3.

   (b) Déterminer la forme algébrique de z_3.

   (c) Déduire de ce qui précède les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 5 (un calcul de somme)**.**
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la somme S_n suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k.$$

Dans cet exercice, on démontre de plusieurs manières différentes que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$(*) \ : \ S_n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

1. *Par récurrence.*
   Démontrer le résultat $(*)$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

2. *Par un décalage d'indice.*
   On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on effectue le changement d'indice $\ell = k+1$ sur la somme S_n.
   (a) Montrer qu'on obtient ainsi que $S_n = \dfrac{1}{2}\left(\sum_{\ell=2}^{n+1} \ell 2^\ell - \sum_{\ell=2}^{n+1} 2^\ell\right)$
   (b) En déduire que $S_n = \dfrac{1}{2}\left(S_{n+1} - 2^{n+2} + 2\right)$.
   (c) Obtenir alors le résultat $(*)$ en exprimant S_{n+1} en fonction de S_n.
3. *Via une somme double.*
   On remarque que $k2^k = \sum_{j=1}^{k} 2^k$, de sorte que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} 2^k$.
   (a) Écrire S_n sous la forme d'une somme double.
   (b) Obtenir alors le résultat $(*)$ en suivant l'autre ordre de sommation possible.

Exercice 6 (un calcul de produit)**.**
Soit $n \geq 2$ un entier fixé. On souhaite calculer le produit suivant

$$A = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3+1}{k^3-1}.$$

On note $P_1(X) = X^3+1$ et $P_2(X) = X^3-1$ de sorte que : $A = \prod_{k=2}^{n} \dfrac{P_1(k)}{P_2(k)}$.

1. (a) Justifier que les polynômes P_1 et P_2 peuvent s'écrire sous les formes

   $$P_1(X) = (X+1)Q_1(X) \quad \text{et} \quad P_2(X) = (X-1)Q_2(X)$$

   avec $Q_1(X), Q_2(X) \in \mathbb{R}[X]$.
   (b) Déterminer ensuite les polynômes $Q_1(X)$ et $Q_2(X)$.
2. Montrer alors que $A = \dfrac{n(n+1)}{2} \times B$ où $B = \prod_{k=2}^{n} \dfrac{k^2-k+1}{k^2+k+1}$
3. Résoudre l'équation $z^2+z+1=0$ sur $\mathbb{C}$.

Dans la suite de l'exercice, on note $\mathtt{j}$ l'unique solution de partie imaginaire positive trouvée à la question précédente. On a donc en particulier $\mathtt{j}^2 + \mathtt{j} + 1 = 0$.

4. (a) Démontrer que $\mathtt{j}^3 = 1$.
   (b) Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a : $Q_1(z) = (z+\mathtt{j})(z+\mathtt{j}^2)$ et $Q_2(z) = (z-\mathtt{j})(z-\mathtt{j}^2)$.
5. En déduire que $B = \left(\prod_{k=2}^{n} \dfrac{\mathtt{j}+k}{\mathtt{j}+k+1}\right) \times \left(\prod_{k=2}^{n} \dfrac{-\mathtt{j}+k-1}{-\mathtt{j}+k}\right)$.
6. Simplifier l'expression précédente et conclure que $A = \dfrac{3n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$.