

Exercice 1

- 1) def moy(L):  
    return sum(L)/len(L)
- 2) def tousplus(L):  
    for x in L:  
        if x < 10:  
            return False  
    return True
- 3) import matplotlib.pyplot as plt  
    def trace(L):  
        N = len(L)  
        absi = [k for k in range(1, N+1)]  
        plt.plot(absi, L)  
        plt.show()
- 4) def separe(L):  
    L1 = []  
    L2 = []  
    for x in L:  
        if x >= 10:  
            L1.append(x)  
        else:  
            L2.append(x)  
    return L1, L2
- 5) def moy\_bis(L):  
    L1, L2 = separe(L)  
    m1 = moy(L1)  
    m2 = moy(L2)  
    return m1, m2

## Exercice 2

1) On a :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [0, n], \boxed{\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}}$ .

En effet,  $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ .

2) On a :  $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \boxed{|z+z'| \leq |z|+|z'|}$ .

En effet, on calcule que :

$$\begin{aligned} |z+z'|^2 &= (z+z')(\overline{z+z'}) = (z+z')(\bar{z}+\bar{z}') = z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' \\ &= |z|^2 + z\bar{z}' + \overline{z\bar{z}'} + |z'|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') + |z'|^2 \end{aligned}$$

Or  $\operatorname{Re}(z\bar{z}') \leq |z\bar{z}'| = |z||\bar{z}'| = |z||z'|$ .

On a donc  $|z+z'|^2 \leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2$

ou encore  $|z+z'|^2 \leq (|z|+|z'|)^2$ .

Comme  $|z+z'| \geq 0$  et  $|z|+|z'| \geq 0$ , en passant à la racine carrée on en déduit que  $|z+z'| \leq |z|+|z'|$ .

## Exercice 3 :

1) Via le changement d'indice  $j=k+1$  (donc  $k=j-1$ , et  $0 \leq k \leq n \Leftrightarrow 1 \leq j \leq n+1$ ) on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} 2^k &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} 2^{j-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} 2^j \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} 2^j - \binom{n+1}{0} 2^0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} 2^j 1^{n+1-j} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( (2+1)^{n+1} - 1 \right) = \boxed{\frac{3^{n+1} - 1}{2}}. \end{aligned}$$

2) On remarque que  $P(1) = 1 + 3 - 9 + 5 = 0$  et que, puisque  $P'(X) = 3X^2 + 6X - 9$ , on a aussi  $P'(1) = 3 + 6 - 9 = 0$ .

Ainsi 1 est racine multiple de  $P$  donc il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(X) = (X-1)^2 Q(X)$ . Nécessairement,  $\deg(Q) = \deg(P) - \deg((X-1)^2) = 3 - 2 = 1$

donc il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  (avec  $a \neq 0$ ) tels que  $Q(X) = aX + b$ .

Dès lors :

$$P(X) = (X-1)^2 Q(X) \Leftrightarrow X^3 + 3X^2 - 9X + 5 = (X^2 - 2X + 1)(aX + b)$$

$$\Leftrightarrow X^3 + 3X^2 - 9X + 5 = aX^3 + (b - 2a)X^2 + (a - 2b)X + b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 3 \\ a - 2b = -9 \\ b = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases}$$

donc  $Q(X) = X + 5$   
et finalement

$$P(X) = (X-1)^2(X+5)$$

3) Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , on calcule que :

$$\cos^3(\theta) \sin(\theta) = \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 \left( \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)$$

$$= \frac{1}{16i} \left( (e^{i\theta})^3 + 3(e^{i\theta})^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} (e^{-i\theta})^2 + (e^{-i\theta})^3 \right) (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$= \frac{1}{16i} \left( e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta} \right) (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$= \frac{1}{16i} \left( e^{4i\theta} + 3e^{2i\theta} + 3 + e^{-2i\theta} - e^{2i\theta} - 3 - 3e^{-2i\theta} - e^{-4i\theta} \right)$$

$$= \frac{1}{16i} \left( e^{4i\theta} - e^{-4i\theta} + 2(e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}) \right)$$

$$= \frac{1}{16i} \left( 2i \sin(4\theta) + 2 \times 2i \sin(2\theta) \right)$$

$$= \boxed{\frac{\sin(4\theta) + 2\sin(2\theta)}{8}}$$

### Exercice 4

1) a) Pour  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et  $k \geq 2$  on a :

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k-1} + \frac{c}{k+1} = \frac{a(k-1)(k+1) + b k(k+1) + c k(k-1)}{k(k-1)(k+1)}$$
$$= \frac{(a+b+c)k^2 + (b-c)k - a}{k(k^2-1)}$$

La seule possibilité pour que cette quantité soit égale à  $\frac{k-5}{k(k^2-1)}$  pour tout  $k \geq 2$  est que :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ b-c=1 \\ -a=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b+c=-5 \\ b-c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-5-c \\ -5-c-c=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-5-c \\ c=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-2 \\ c=-3 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } \forall k \geq 2, \quad \boxed{\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{5}{k} - \frac{2}{k-1} - \frac{3}{k+1}}$$

b) En conséquence, pour  $n \geq 2$ ,

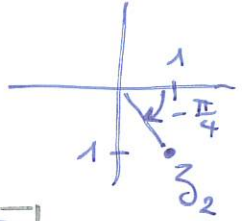
$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{k-5}{k(k^2-1)} &= 5 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - 3 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} \\ &= (2+3) \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - 3 \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= 2 \left( \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) + 3 \left( \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} \right) \\ &= 2 \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{1} \right) + 3 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{2}{n} - 2 + \frac{3}{2} - \frac{3}{n+1} = \boxed{\frac{2}{n} - \frac{3}{n+1} - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

2) a) Commençons par déterminer les formes polaires de  $z_1$  et  $z_2$ .

On a:  $|z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}$ , d'où

$z_1 = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$ . Donc  $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

On peut procéder de même pour  $z_2$  ou s'appuyer sur un schéma pour voir que  $|z_2| = \sqrt{2}$  et que  $-\frac{\pi}{4}$  est un argument de  $z_2$ , de sorte que  $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$



Dès lors,  $z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{6} + i\frac{\pi}{4}} = \boxed{e^{i\frac{\pi}{12}}}$

b) On calcule que :

$$z_3 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2} + i\sqrt{6} - i^2\sqrt{2}}{2(1^2 - i^2)}$$

Donc  $z_3 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

c) Comme  $z_3 = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ , en égalisant parties réelle et imaginaire de  $z_3$  dans les 2 expressions trouvées, on obtient que  $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$  et  $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$ .

### Exercice 5:

1) Pour  $n=1$ , on a  $S_1 = \sum_{k=1}^1 k 2^k = 1 \times 2^1 = 2$ , et  $(1-1)2^{1+1} + 2 = 2$

La formule (\*) est donc vraie pour  $n=1$ .

Supposons ensuite que (\*) soit vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

alors  $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k 2^k = \sum_{k=1}^n k 2^k + (n+1)2^{n+1} = S_n + (n+1)2^{n+1}$

En utilisant l'hypothèse de récurrence on obtient donc que

$$S_{n+1} = (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1}$$

$$= (n-1+n+1)2^{n+1} + 2$$

$$= \underline{n2^{n+2} + 2} \text{ ce qu'il fallait démontrer.}$$

Par récurrence, on a bien démontré que:  $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$ .

2) a) Poser  $l=k+1$  conduit à  $k=l-1$ . De plus on a alors :

$$1 \leq k \leq n \Leftrightarrow 2 \leq l \leq n+1. \text{ Ainsi:}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n k2^k = \sum_{l=2}^{n+1} (l-1)2^{l-1} = \frac{1}{2} \sum_{l=2}^{n+1} (l-1)2^l$$

d'où, par linéarité de la somme :

$$S_n = \frac{1}{2} \left( \sum_{l=2}^{n+1} l2^l - \sum_{l=2}^{n+1} 2^l \right).$$

b) On remarque que  $\sum_{l=2}^{n+1} l2^l = \sum_{l=1}^{n+1} l2^l - 1 \times 2^1 = S_{n+1} - 2$ .

Et on calcule que

$$\sum_{l=2}^{n+1} 2^l = \sum_{l=0}^{n+1} 2^l - 2^1 - 2^0 = \frac{1-2^{n+1+1}}{1-2} - 3 = 2^{n+2} - 4$$

Ainsi, l'égalité de la question précédente s'écrit donc

$$S_n = \frac{1}{2} (S_{n+1} - 2 - (2^{n+2} - 4)) = \underline{\frac{1}{2} (S_{n+1} - 2^{n+2} + 2)}$$

c) On a, comme déjà utilisé lors de la récurrence de la question 1,

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)2^{n+1}. \text{ Ainsi:}$$

$$S_n = \frac{1}{2} (S_n + (n+1)2^{n+1} - 2^{n+2} + 2) \text{ donc } 2S_n = S_n + (n+1-2)2^{n+1} + 2$$

$$\text{donc } \underline{S_n = (n-1)2^{n+1} + 2}$$

3) a) Comme indiqué :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k 2^k = \boxed{\sum_{1 \leq j \leq k \leq n} 2^k}$$

b) Donc

$$S_n = \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n 2^k = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=0}^n 2^k - \sum_{k=0}^{j-1} 2^k \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \left( \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - \frac{1-2^j}{1-2} \right) = \sum_{j=1}^n (2^{n+1} - 2^j)$$

$$= \sum_{j=1}^n 2^{n+1} - \left( \sum_{j=0}^n 2^j - 2^0 \right) = n2^{n+1} - \left( \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 1 \right)$$

$$= n2^{n+1} - (2^{n+1} - 2) = \underline{(n-1)2^{n+1} + 2}$$

### Exercice 6 :

1) a) Comme  $P_1(-1) = (-1)^3 + 1 = 0$ ,  $-1$  est racine de  $P_1$  donc  $P_1$  est divisible par  $X - (-1) = X + 1$  donc il existe  $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P_1(X) = (X+1)Q_1(X)$ .

De même  $P_2(1) = 1^3 - 1 = 0$  donc il existe  $Q_2 \in \mathbb{R}(X)$  tel que  $P_2(X) = (X-1)Q_2(X)$ .

b) On a  $\deg(Q_1) = \deg(P_1) - \deg(X+1) = 3 - 1 = 2$  donc il existe  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $Q_1(X) = aX^2 + bX + c$ . Dès lors

$$P_1(X) = (X+1)Q_1(X) \Leftrightarrow X^3 + 1 = (X+1)(aX^2 + bX + c)$$

$$\Leftrightarrow X^3 + 1 = aX^3 + (a+b)X^2 + (b+c)X + c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \\ b+c=0 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$$

donc  $\boxed{Q_1(X) = X^2 - X + 1}$

De même, notant  $\Phi_2(X) = aX^2 + bX + c$ . On a

$$\begin{aligned} P_2(X) = (X-1)\Phi_2(X) &\Leftrightarrow X^3 - 1 = (X-1)(aX^2 + bX + c) \\ &\Leftrightarrow X^3 - 1 = aX^3 + (b-a)X^2 + (c-b)X - c \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b-a=0 \\ c-b=0 \\ -c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \boxed{\Phi_2(X) = X^2 + X + 1}$$

$$2) \text{ Ainsi } A = \prod_{k=2}^n \frac{P_1(k)}{P_2(k)} = \prod_{k=2}^n \frac{(k+1)\Phi_1(k)}{(k-1)\Phi_2(k)} = \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k-1} \times B$$

$$\text{avec } B = \prod_{k=2}^n \frac{\Phi_1(k)}{\Phi_2(k)} = \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - k + 1}{k^2 + k + 1}$$

$$\text{et } \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k-1} = \frac{\prod_{k=2}^n (k+1)}{\prod_{k=2}^n (k-1)} = \frac{\prod_{k=3}^{n+1} k}{\prod_{k=1}^n k} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{(n+1)n}{2}$$

$$\text{Donc on a bien } A = \frac{n(n+1)}{2} \times B.$$

3) Le discriminant de  $X^2 + X + 1$  est  $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 = -3$  donc ses racines sont  $z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$  et  $z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

L'ensemble des solutions est donc  $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}}$ .

4) a) D'après la question précédente,  $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ . On propose ci-dessous trois méthodes pour montrer que  $j^3 = 1$ .

méthode 1: en développant le cube:

$$\begin{aligned} j^3 &= \left( \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (-1 + i\sqrt{3})^3 \\ &= \frac{1}{8} ((-1)^3 + 3(-1)^2(i\sqrt{3}) + 3(-1)(i\sqrt{3})^2 + (i\sqrt{3})^3) \\ &= \frac{1}{8} (-1 + 3i\sqrt{3} - 3i^2\sqrt{3}^2 + i^2\sqrt{3}^2 i\sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{8} (-1 + 3i\sqrt{3} + 9 - 3i\sqrt{3}) = \frac{8}{8} = 1. \end{aligned}$$

méthode 2 : en utilisant la forme exponentielle :

$$j^3 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^3 = \left(e^{2i\pi/3}\right)^3 = e^{2i\pi} = \underline{1}$$

méthode 3 : en utilisant que  $j^2 + j + 1 = 0$

On en déduit que  $j^3 + j^2 + j = 0 \times j = 0$  donc  $j^3 = -j^2 - j$

Or  $j^2 + j + 1 = 0$  donc  $1 = -j^2 - j$ . Donc  $\boxed{j^3 = 1}$ .

b) Calculons pour  $z \in \mathbb{C}$  :

$$(z+j)(z+j^2) = z^2 + (j+j^2)z + j^3, \text{ et}$$

$$(z-j)(z-j^2) = z^2 - (j+j^2)z + j^3$$

Or, d'après la question a),  $j^3 = 1$  ; et comme  $j^2 + j + 1 = 0$ , on a

$$j^2 + j = -1.$$

$$\text{Donc } (z+j)(z+j^2) = z^2 - z + 1 = \underline{\phi_1(z)}$$

$$\text{et } (z-j)(z-j^2) = z^2 - (-z) + 1 = z^2 + z + 1 = \underline{\phi_2(z)}$$

5) On a :

$$B = \prod_{k=2}^n \frac{\phi_1(k)}{\phi_2(k)} = \prod_{k=2}^n \frac{(k+j)(k+j^2)}{(k-j)(k-j^2)} = \prod_{k=2}^n \frac{k+j}{k-j^2} \times \prod_{k=2}^n \frac{k+j^2}{k-j}$$

Or  $j^2 + j + 1 = 0$  donc  $j^2 = -j - 1$ .

$$\text{Donc } B = \prod_{k=2}^n \frac{k+j}{k-(-j-1)} \times \prod_{k=2}^n \frac{k-j-1}{k-j}$$

$$= \prod_{k=2}^n \frac{j+k}{j+k+1} \times \prod_{k=2}^n \frac{-j+k-1}{-j+k}$$

6) On réalise un télescopage pour chacun des produits apparus à la question précédente :

$$\prod_{k=2}^n \frac{j+k}{j+k+1} = \frac{\prod_{k=2}^n (j+k)}{\prod_{k=2}^n (j+(k+1))} = \frac{\prod_{k=2}^n (j+k)}{\prod_{k=3}^{n+1} (j+k)} = \boxed{\frac{j+2}{j+n+1}}$$

et

$$\prod_{k=2}^n \frac{-j+k-1}{-j+k} = \frac{\prod_{k=2}^n (-j+(k-1))}{\prod_{k=2}^n (-j+k)} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (-j+k)}{\prod_{k=2}^n (-j+k)} = \boxed{\frac{-j+1}{-j+n}}$$

Ainsi  $B = \frac{j+2}{j+n+1} \times \frac{-j+1}{-j+n} = \frac{-j^2 - 2j + j + 2}{-j^2 - nj - j + nj + n^2 + n}$

$$= \frac{-j^2 - j + 2}{-j^2 - j + n^2 + n}$$

Or  $j^2 + j + 1 = 0$  donc  $-j^2 - j = 1$ .

Donc  $B = \frac{1+2}{1+n^2+n} = \frac{3}{n^2+n+1}$

et finalement,  $A = \frac{n(n+1)}{2} \times B = \boxed{\frac{3n(n+1)}{2(n^2+n+1)}}$