Programme de colles : semaine 12, du 16/12 au 20/12

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Nombres complexes

L'utilisation des nombres complexes pour résoudre des problèmes de géométrie n'est pas un objectif du programme. On utilisera en revanche l'interprétation géométrique pour illustrer des calculs algébriques.

Reprise du programme précédent. Les points suivants sont à ajouter :

- technique "de l'angle moitié" pour déterminer la forme trigonométrique de $e^{i\theta} \pm e^{i\varphi}$
- formule de Moivre, "délinéarisation" de $\cos(k\,\theta),\ \sin(k\,\theta)$
- calculs de sommes trigonométriques

2 Logique

Le raisonnement par analyse synthèse n'a pas encore été abordé en classe.

- principe d'exemple et de contre-exemple pour prouver une propriété du type "$\exists\, x \in E\ :\ \mathcal{P}(x)$" ou nier une propriété du type "$\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$"
- principe pour prouver une propriété du type "$\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$" ("soit $x \in E$ alors ... donc $\mathcal{P}(x)$")
- principe de double implication pour prouver une équivalence
- principe de contraposition pour prouver une implication
- raisonnement par l'absurde

3 Ensembles

Attention, début de chapitre uniquement : *l'union, l'intersection, le complémentaire, le produit cartésien, l'ensemble des parties, les notions de majorant/minorant, et de borne supérieure/inférieure d'un ensemble n'ont pas encore été traités en classe. On se concentrera sur des exercices du type : montrer une inclusion ou une égalité d'ensembles définis par équation ou par paramètre.*

- vocabulaire : élément, partie, ensemble vide ; descriptions d'ensembles : en extension, par équation et par paramétrage
- inclusion, égalité, principe de double inclusion : savoir montrer que $A \subset B$, via "soit $x \in A$ alors ... donc $x \in B$". Savoir montrer que $A \not\subset B$
- égalité d'ensembles : savoir montrer que $A = B$ par principe de double inclusion, ou en montrant que $x \in A \iff x \in B$

4 Informatique en langage Python

Attention, les indices des éléments d'une liste n'ont pas été abordés en classe. Modification et suppression d'éléments seront également vus plus tard.

Listes : *Reprise du programme précédent.*
Bibliothèques :

- on recommande la syntaxe `import bibli as alias`
- bibliothèques `numpy` et `matplotlib.pyplot`
- savoir tracer le graphe d'une fonction ou d'une suite de nombres réels. *La fonction `linspace` n'a pas été abordée en classe. Les élèves doivent savoir définir une liste d'abscisses du type `[a + k*(b-a)/N for k in range(N+1)]`*

5 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$.
2. Résoudre sur $\mathbb{C}$: $z^2 = w$ où $w \in \mathbb{C}$ est une constante choisie par l'examinateur. *On précisera aux élèves si on souhaite qu'ils cherchent z sous forme algébrique ou polaire.*
3. Énoncer et démontrer les formules d'Euler.
4. Pour $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{2p\pi,\ p \in \mathbb{Z}\}$ et $n \in \mathbb{N}$ déterminer la valeur de $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.
5. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux assertions, que sont la contraposée et la réciproque de $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$?
6. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.
7. Soient les ensembles $E = \{(t, 4t-1),\ t \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\}$. Montrer que $E = F$.
8. Soient les ensembles $A = \{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right),\ t \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 = 1\}$. Montrer que $A \subsetneq B$ *(attention, ici il y a deux questions en une).* On considérera l'élément $(-1, 0)$.
9. Écrire un programme Python permettant de tracer le graphe d'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ choisie par l'examinateur.
10. Écrire un programme Python permettant de tracer u_n en fonction de n où (u_n) est une suite définie par récurrence choisie par l'examinateur.

Pas de question de calcul imposée cette semaine.
La question de cours est notée sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.