

Rappels sur les opérations sur les limites :

Nota bene : souvent, on préférera écrire $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ plutôt que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$. Cela permet en particulier de mener des calculs avant de conclure à la limite. Par exemple, l'écriture suivante est correcte :

$$\frac{1 + e^x}{e^x} = e^{-x} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

mais l'écriture ci-dessous ne l'est pas (car on ne sait pas encore si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^x}{e^x}$ existe avant de mener le calcul) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + 1 = 1$$

Enfin, on ne confondra pas les expressions “tend vers” et “égal”. Dire par exemple que “la limite de e^x quand x tend vers $+\infty$ *tend* vers $+\infty$ ” est incorrect.

1 Limites des fonctions usuelles

On rappelle les limites suivantes, issues du cours :

- | | |
|--|--|
| • pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n =$ | • $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x =$ |
| • pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n =$ | • $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x =$ |
| • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} =$ | • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) =$ |
| • $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} =$ | • $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) =$ |
| • $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} =$ | • pour $q \in \mathbb{R}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n =$ |
| • $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} =$ | • $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) =$ |
| | • $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) =$ |

Par ailleurs, si $x_0 \in \mathbb{R}$ et si f est continue en x_0 (en particulier si f est continue sur son ensemble de définition), alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Par exemple, $\lim_{x \rightarrow 0} e^x =$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2-x} =$

2 Opérations algébriques

Lorsqu'on connaît les limites de deux quantités $f(x)$ et $g(x)$, on peut *souvent* en déduire la limite de $f(x) + g(x)$, $f(x) \times g(x)$ et $\frac{f(x)}{g(x)}$. Attention, dans certains cas on ne peut pas conclure en l'état : on dit qu'on a une forme indéterminée (F.I.), il peut alors y avoir ou non de limite, finie ou non. Par exemple, si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et si $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$, alors on ne peut pas conclure quant à la limite de $f(x) + g(x)$ en $+\infty$, c'est la forme indéterminée “ $\infty - \infty$ ”.

On considère des fonctions f et g définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

- **Somme :** Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell'$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x)$ est donné par

	$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell' = -\infty$	$\ell' = +\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	
$\ell = -\infty$			F.I.
$\ell = +\infty$			

- **Produit :** Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell'$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times g(x)$ est donné par

	$\ell' < 0$	$\ell' = 0$	$\ell' > 0$	$\ell' = -\infty$	$\ell' = +\infty$
$\ell < 0$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell = 0$					
$\ell > 0$					
$\ell = -\infty$					
$\ell = +\infty$					

- **Inverse :** Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$ est donné par

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\ell \neq 0$	$\ell = -\infty$	$\ell = +\infty$	$\ell = 0^+$	$\ell = 0^-$	$\ell = 0$ (mais ni 0^+ , ni 0^-)
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{\ell}$					

Remarque : Pour déterminer la limite d'un quotient $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$, utiliser le tableau “inverse” puis le tableau “produit”.

En conclusion, il y a quatre types de formes indéterminées :

Attention : Pour déterminer la limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$. Si $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ et si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell \neq 0$, alors il faut s'intéresser au signe de $g(x)$ lorsque $x \rightarrow x_0$ pour savoir si $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0^+$ ou $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0^-$.

Nota bene : Par définition,

$x \rightarrow x_0^+$ signifie :

$x \rightarrow x_0^-$ signifie :

Exemple : Déterminer les limites suivantes :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{x-1} \quad \left| \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+1}{x-1} \quad \left| \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+2}{3-x} \quad \left| \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2-4} \right.$$

3 Composition de limites

Proposition 1

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$, soit x_0 un point de I ou de son bord (éventuellement $x_0 = \pm\infty$), et soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$ et $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow \ell} \ell'$ alors

Exemple : Déterminer les limites suivantes :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \quad \left| \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln|x| \quad \left| \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1+\sqrt{x}} \quad \left| \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{1/x} \right.$$

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes ou préciser s'il s'agit d'une forme indéterminée :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \ln(x)$	4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - x}{\ln(x)}$	6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) \ln(x)$	5. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2x^2}{1 - x^3}$	7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{\ln(x)}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \ln(x)$		

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes ou préciser s'il s'agit d'une forme indéterminée :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x^4}$	4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^x}{\ln x}$	7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x+1}\right)$	5. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{1}{ x-1 }}$	8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$	6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^2}$	9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x - e^{1/x}}$
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \sqrt{2 + \frac{1}{x}}\right) \times e^{\sqrt{x}}$		