

**Exercice 1** Graphiques

Dans le TP précédent, on a vu comment tracer les graphes des fonctions suivantes en fonction du graphe de  $f : x \mapsto -f(x)$ ;  $x \mapsto f(-x)$ ;  $x \mapsto f(x) + K$ ;  $x \mapsto f(x + K)$

En appliquant ces règles, tracez à la main les graphes de fonctions suivantes. Vérifiez ensuite votre résultat en utilisant Python.

1.  $f_1 : x \mapsto x^3 + 1$
2.  $f_2 : x \mapsto \ln(x + 1)$
3.  $f_3 : x \mapsto e^{-x}$
4.  $f_4 : x \mapsto -\frac{1}{x - 2}$

**Exercice 2** Conjecture de Syracuse

Soit  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  la fonction définie par

$$f(k) = \begin{cases} \frac{k}{2} & \text{si } k \text{ est pair} \\ 3k + 1 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

On appelle «*suite de Syracuse d'un entier A*» la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = A$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \geq 0$ .

**Q1** Calculer à la main la suite de Syracuse de 3. Que se passe-t-il lorsque la suite atteint la valeur 1 ?

**Remarque**

La conjecture de Syracuse affirme que toutes les suites de Syracuse des entiers positifs atteignent la valeur 1 au bout d'un certain temps. Cette conjecture a été vérifiée pour tous les entiers naturels  $A$  inférieurs à  $2^{62}$ , mais on ignore encore si elle est vraie.

**Q2** Écrire une fonction `f` prenant en argument un entier  $k \geq 1$  et renvoyant  $f(k)$ .

**Q3** Écrire une fonction `syracuse` prenant en argument deux entiers  $A$  et  $n$  et renvoyant la valeur  $\text{syracuse}(A, n) = u_n$  où  $(u_n)$  est la suite de Syracuse de  $A$ . On vérifiera que `syracuse(15, 9)` renvoie la valeur 40.

**Q4** Écrire un programme Python permettant de tracer le graphe de la suite de Syracuse de  $A$ . Constatez sur ce graphe que, peu importe la valeur de  $A$  choisie initialement, la suite finit par atteindre le cycle  $4 - 2 - 1$ .

**Q5** Écrire une fonction `TempsVol` prenant en argument un entier  $A$  et renvoyant la plus petite valeur de  $n$  telle que le  $n$ -ème terme de la suite de Syracuse de l'entier  $A$  vaut 1 (on suppose que ce terme existe, c'est-à-dire que la conjecture est vérifiée). On vérifiera que `TempsVol(15)` renvoie la valeur 17.

**Q6** Tracer les valeurs de `TempsVol(N)` en fonction de  $A$  pour  $1 \leq A \leq 1000$ .

**Q7** Que se passe-t-il si on choisit  $A < 0$ ? On pourra consulter la vidéo du youtubeur "El Jj" sur le sujet : <https://www.youtube.com/watch?v=BP2G28694z8>.