

Première technique pour lever une forme indéterminée

Rappel : il y a quatre types de formes indéterminées :

La technique usuelle pour lever une indétermination consiste à mettre en facteur le terme “dominant” (c’est-à-dire celui qui est le plus grand). En faisant cela, on fait souvent apparaître une simplification qui permet de conclure quant à la limite demandée.

Exemple : déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5}{x^2 - 1}$ (F.I. de la forme $\frac{\infty}{\infty}$). On écrit que :

$$\frac{2x + 5}{x^2 - 1} = \frac{x \left(\frac{2x + 5}{x} \right)}{x^2 \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)} =$$

Dès lors, comme :

-
-
-

on a finalement

Remarque : Attention, puisqu’il s’agit de lever une forme indéterminée, on réalise un calcul *sans savoir encore si la limite existe*. Ainsi **on ne commence pas la rédaction par :**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \dots$$

Cette méthode peut également fonctionner dans certains cas pour lever une indétermination du type $\infty - \infty$.

Exemple : déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n - 3^n$ (F.I. de la forme $\infty - \infty$). On écrit que :

$$4^n - 3^n = 4^n \times \left(1 - \frac{3^n}{4^n} \right) = 4^n \times \left(1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n \right)$$

Or $-1 < \frac{3}{4} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n = 1$.

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n - 3^n = +\infty$.

Enfin, cette méthode peut aussi fonctionner pour lever une indétermination du type $\frac{0}{0}$. Il faut toutefois faire attention à ne pas se tromper dans l’identification du terme dominant...

Exemple : déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x}}{x^2 - \sqrt{x}}$ (F.I. de la forme $\frac{0}{0}$). Lorsque $x \rightarrow 0$, on a :

On écrit donc :

$$\frac{x + \sqrt{x}}{x^2 - \sqrt{x}} =$$

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes ou préciser s'il s'agit d'une forme indéterminée :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{\ln(x)}$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - e^{-x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2-x}{1-x}$

4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x}{(x+1)^2}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{1-e^{-x}}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$

Exercice 2

Identifier la forme indéterminée puis la lever :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + n^2 - 1}{n^2 + 2}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x - x^2}$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^x - x^3 e^{2x}$

6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n + 5^n}$

Exercice 3

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x + 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - 2e^x + 3$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(e^{-1/x})$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x}{2x^2 + 3}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - x^2}{x - \sqrt{x}}$

6. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$

8. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{3^n - 1}{3^n + 2} \right)$

9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x} \right)^x$