

Remédiation 8

Exercice 1

$$1) \begin{cases} e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \\ \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \end{cases} \text{ donc } \frac{e^{-x}}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$2) \begin{cases} -x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty \\ e^y \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty \end{cases} \text{ donc } e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$$

Donc, par somme $x - e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$

$$3) 2-x \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1 \text{ et } 1-x \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 0^- \text{ car}$$

si $x > 1$ alors $1-x < 0$

Donc $\frac{2-x}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} -\infty$

$$4) x^3 - 2x \xrightarrow{x \rightarrow -1} (-1)^3 - 2(-1) = 1$$

$$(x+1)^2 \xrightarrow{x \rightarrow -1} 0^+ \text{ car } (x+1)^2 \geq 0$$

donc $\frac{x^3 - 2x}{(x+1)^2} \xrightarrow{x \rightarrow -1} +\infty$

$$5) x+1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \text{ et } 1-e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0^-$$

car $x < 0$ alors $-x > 0$ donc $e^{-x} > 1$ donc $1-e^{-x} < 0$

Donc $\frac{x+1}{1-e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$

$$6) \sqrt{x}^{\sqrt{x}} = \exp(\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{x} \ln(x)\right)$$

Or $\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ et $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$

donc F.I. $0 \times \infty$

Exercice 2

$$1) \text{ F.I. } \frac{\infty}{\infty}, \frac{n^3 + n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{n^3(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3})}{n^2(1 + \frac{2}{n^2})} = n \times \frac{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{2}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$2) \text{ F.I. } \frac{\infty - \infty}{\infty}, \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \frac{x(1 - \frac{\sqrt{x}}{x})}{x(1 + \frac{\sqrt{x}}{x})} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \text{ car } \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$3) \text{ F.I. } \frac{0}{0}, \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1} = -1$$

$$4) \text{ F.I. } \frac{\infty}{\infty - \infty}, \frac{x^2 - 1}{x - x^2} = \frac{x^2(1 - \frac{1}{x^2})}{x^2(\frac{1}{x} - 1)} = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} - 1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 0}{0 - 1} = -1 \text{ car } \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

et $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$

$$5) \text{ F.I. } \infty - \infty, x^2 e^x - x^3 e^{2x} = x^3 e^{2x} \left(\frac{1}{x} e^{-x} - 1 \right)$$

Or $x^3 e^{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\frac{1}{x} e^{-x} = \frac{1}{x e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $\frac{1}{x} e^{-x} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1$

Donc $x^2 e^x - x^3 e^{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$

$$6) \text{ F.I. } \frac{\infty}{\infty}, \frac{2^n + 3^n}{4^n + 5^n} = \frac{2^n(1 + \frac{3^n}{2^n})}{5^n(\frac{4^n}{5^n} + 1)} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \frac{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^n}{\left(\frac{4}{5}\right)^n + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car $\frac{2}{5}, \frac{3}{2}, \frac{4}{5} \in]-1, 1[$

donc $\left(\frac{2}{5}\right)^n, \left(\frac{3}{2}\right)^n$

et $\left(\frac{4}{5}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Exercice 3

1) $x^2+1 \xrightarrow{x \rightarrow -1} (-1)^2+1=2$ et $x+1 \xrightarrow{x \rightarrow -1^-} 0^-$ car $x+1 \xrightarrow{x \rightarrow -1} 0$ et que si $x < -1$ alors $x+1 < 0$
 Donc $\frac{x^2+1}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow -1^-} -\infty$

2) $e^{2x} - 2e^x + 3 = e^{2x} (1 - 2e^{-x} + 3e^{-2x}) = e^{2x} (1 - \frac{2}{e^x} + \frac{3}{e^{2x}})$

Or $e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\frac{2}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
 et $e^{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\frac{3}{e^{2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ } donc $1 - \frac{2}{e^x} + \frac{3}{e^{2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$

Et $e^{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc par produit, $e^{2x} - 2e^x + 3 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

3) $-\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ et $e^y \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} 0$ donc $e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ donc $\sinh(e^{-1/x}) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \sinh(0) = 0$

4) $\frac{x^2-3x}{2x^2+3} = \frac{1-\frac{3}{x}}{2+\frac{3}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}$ car $\frac{3}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ et $\frac{3}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$

5) $\frac{x^3-x^2}{x-\sqrt{x}} = \frac{x^2(x-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = x\sqrt{x} \times \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ car $x\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$
 et $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{-1} = 1$

6) $x^2+2x-3 \xrightarrow{x \rightarrow -1} (-1)^2+2(-1)-3=-4$ et $x^2-1 \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} 0^+$ car si $x > -1$ alors $x^2 < 1$ (Δ fonction carrée est $\downarrow$ sur $\mathbb{R}^-$) donc $x^2-1 < 0$
 Ainsi $\frac{x^2+2x-3}{x^2-1} \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} +\infty$

7) FI $\frac{0}{0}$, on factorise par $x-1$: 1 est racine évidente de X^2+2X-3 , on trouve que $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$. Et $x^2-1 = (x-1)(x+1)$.
 Ainsi $\frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+3}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{4}{2} = 2$

8) $\frac{3^n-1}{3^n+2} = \frac{1-\frac{1}{3^n}}{1+\frac{2}{3^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ car $\frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$
 Or $\ln(y) \xrightarrow{y \rightarrow 1} 0$. Donc $\ln\left(\frac{3^n-1}{3^n+2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

9) $\left(-\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x \ln\left(-\frac{1}{x}\right)\right)$, puis $-\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0^+$ et $\ln(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} -\infty$ donc $x \ln\left(-\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$, et donc $\left(-\frac{1}{x}\right)^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$.