

NOM :

PRENOM :

Question 1. Déterminer les limites suivantes. Chaque réponse doit être justifiée succinctement.

1. (/1 pt) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \sin(x)$

2. (/1 pt) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x}$

3. (/2 pts) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3n}{n^3 + n - 1}$

4. (/2 pts) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{3-x}$

5. (/2 pts) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 - e^{-1/x})$

6. (/2 pts) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 1}{3^n - 5^n}$

1) $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ et $\sin(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ donc $\frac{1}{x} - \sin(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$

2) $e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ et $x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ donc $\frac{e^x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$

3) $\frac{2n^2 - 3n}{n^3 + n - 1} = \frac{n^2(2 - \frac{3}{n})}{n^3(1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3})} = \frac{1}{n} \times \frac{2 - \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

car $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{2 - \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$

4) $x \xrightarrow{x \rightarrow 3^-} 3$ et $3-x \xrightarrow{x \rightarrow 3^-} 0^+$ car si $x < 3$ alors $3-x > 0$
donc $\frac{x}{3-x} \xrightarrow{x \rightarrow 3^-} +\infty$

5) $-\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $e^y \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$ donc $e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$
donc $1 - e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $\ln(1 - e^{-1/x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$

6) $\frac{2^n - 1}{3^n - 5^n} = \frac{2^n(1 - \frac{1}{2^n})}{5^n(\frac{3^n}{5^n} - 1)} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{(\frac{3}{5})^n - 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

car $\left(\frac{2}{5}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\left(\frac{3}{5}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

car $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5} \in]-1, 1[$.

NOM :

PRENOM :

Question 1. Déterminer les limites suivantes. Chaque réponse doit être justifiée succinctement.

1. (/1 pt) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(x) - \frac{1}{x}$

2. (/1 pts) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$

3. (/2 pts) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - n + 1}{3n^2 - 2n}$

4. (/2 pts) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x}{4-x}$

5. (/2 pts) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1 - e^{-1/x})$

6. (/2 pts) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 3^n}{5^n - 1}$

1) $\cos(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$ et $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ donc $\cos(x) - \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$

2) $\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ et $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ donc $\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$

3) $\frac{n^3 - n + 1}{3n^2 - 2n} = \frac{n^3(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3})}{n^2(3 - \frac{2}{n})} = n \times \frac{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{3 - \frac{2}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
car $n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\frac{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{3 - \frac{2}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}$

4) $x \xrightarrow{x \rightarrow 4^-} 4$ et $4-x \xrightarrow{x \rightarrow 4^-} 0^+$ car si $x < 4$ alors $4-x > 0$
donc $\frac{x}{4-x} \xrightarrow{x \rightarrow 4^-} +\infty$

5) $-\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ et $e^y \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} 0$ donc $e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$
donc $1 - e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$ donc $\ln(1 - e^{-1/x}) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ln(1) = 0$

6) $\frac{2^n - 3^n}{5^n - 1} = \frac{3^n(\frac{2^n}{3^n} - 1)}{5^n(1 - \frac{1}{5^n})} = \left(\frac{3}{5}\right)^n \times \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

car $\left(\frac{3}{5}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\left(\frac{1}{5}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

car $\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5} \in]-1, 1[$.