4 Bornes supérieures et inférieures d'une partie de $\mathbb{R}$

4.1 Majorants, minorants

Définition 1
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et soient $M, m \in \mathbb{R}$ on dit que :

- M est un majorant de A lorsque : $\forall a \in A,\ a \leq M$,
- m est un minorant de A lorsque : $\forall a \in A,\ a \geq m$.

Définition 2
Soit A une partie de $\mathbb{R}$, on dit que :

- A est majorée lorsqu'elle admet un majorant, c'est-à-dire lorsque :
  $\exists M \in \mathbb{R}\ :\ \forall a \in A,\ a \leq M$,
- A est minorée lorsqu'elle admet un minorant, c'est-à-dire lorsque :
  $\exists m \in \mathbb{R}\ :\ \forall a \in A,\ a \geq m$,
- A est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée, c'est-à-dire lorsque :
  $\exists m, M \in \mathbb{R}\ :\ \forall a \in A,\ m \leq a \leq M$.

Exemples :

- -2 est un minorant de $A =]0, 1]$ et 3 est un majorant de A. Ainsi A est bornée.
- $A =]-\infty, 3]$ est majorée mais non minorée (donc A n'est pas bornée).

Remarque :

- M n'est pas un majorant de A lorsque : $\exists a \in A\ :\ a > M$,
- m n'est pas un minorant de A lorsque : $\exists a \in A\ :\ a < m$.

Remarque : Un majorant ou un minorant de A n'appartient pas forcément à A.

4.2 Maximum, minimum

Définition 3
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- Si M est un majorant de A et si de plus $M \in A$ on dit que M est le maximum de A et on note $M = \max(A)$.
- Si m est un minorant de A et si de plus $m \in A$ on dit que m est le minimum de A et on note $m = \min(A)$.

Remarque : on parle "du" maximum ou "du" minimum de A car on peut montrer que si un tel élément existe alors il est unique.

Exemple : $\max([1, 2]) = 2$ et $\min([1, 2]) = 1$.

Lien avec le maximum/minimum d'une fonction : Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$, on rappelle que :

- f admet un maximum en $x_0 \in D$ lorsque : $\forall x \in D,\ f(x_0) \geq f(x)$,
- f admet un minimum en $x_0 \in D$ lorsque : $\forall x \in D,\ f(x_0) \leq f(x)$.

Autrement dit f admet un maximum (resp. minimum) en x_0 si et seulement si on a $f(x_0) = \min(f(D))$ (resp. $f(x_0) = \max(f(D))$).
Attention, tous les ensembles n'admettent pas un maximum ou un minimum. Par exemple, l'ensemble $A = [0,1[$ n'admet pas de maximum.

En effet, si $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de $[0,1[$ alors : $\forall a \in [0,1[,\ a \leq M$. Cela implique[1] que $1 \leq M$. Ainsi tout majorant M de $[0,1[$ satisfait $M \geq 1$ donc $M \notin [0,1[$. Ainsi $[0,1[$ n'a pas de maximum.

Pourtant, pour $A = [0,1[$, on sent bien que l'élément 1 joue un rôle particulier. En fait ce n'est pas son maximum, mais ce qu'on appelle sa borne supérieure.

4.3 Bornes supérieures et inférieures

Définition 4
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et soit $s \in \mathbb{R}$.

- On dit que s est la borne supérieure de A et on note $s = \sup(A)$ lorsque s est le plus petit des majorants de A (c'est-à-dire que s est le minimum de l'ensemble des majorants de A).
- On dit que s est la borne inférieure de A et on note $s = \inf(A)$ lorsque s est le plus grand des minorants de A (c'est-à-dire que s est le maximum de l'ensemble des minorants de A).

Exemples :

- $\sup([0,1[) = 1$ car l'ensemble des majorants de $[0,1[$ est $[1,+\infty[$ et que $\min([1,+\infty[) = 1$.
- $\inf(]2,3]) = 2$ car l'ensemble des minorants de $]2,3]$ est $]-\infty,2]$ et que $\max(]-\infty,2]) = 2$.

Remarque : si A admet un maximum (resp. un minimum) alors c'est aussi sa borne supérieure (resp. sa borne inférieure). Mais la réciproque est fausse : une borne supérieure (resp. inférieure) n'est pas forcément un maximum (resp. un minimum).

Avec des quantificateurs : soit A une partie de $\mathbb{R}$ et soit $s \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} s = \sup(A) &\iff s \text{ est le plus petit des majorants de } A \\ &\iff s \text{ est un majorant de } A \text{ et pour tout } \varepsilon > 0,\ s - \varepsilon \text{ n'est pas un majorant de } A \\ &\iff \forall a \in A,\ a \leq s \ \text{ et } \ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \ : \ s - \varepsilon < a. \end{aligned}$$

1. En effet, si, par l'absurde, on avait $M < 1$, alors en prenant $a \in [0,1[$ tel que $M < a < 1$ on aurait, puisque M est un majorant de $[0,1[$, $M < a \leq M$ ce qui est absurde.

De même :

$$\begin{aligned} s = \inf(A) &\iff s \text{ est le plus grand des minorants de } A \\ &\iff s \text{ est un minorant de } A \text{ et pour tout } \varepsilon > 0,\ s+\varepsilon \text{ n'est pas un minorant de } A \\ &\iff \forall a \in A,\ a \geq s \ \text{ et } \ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A\ :\ s + \varepsilon > a. \end{aligned}$$

Exercice :

1. Soit $A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Montrer que $\inf(A) = 0$.
2. Soit $B = \left\{1 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Montrer que $\sup(B) = 1$.

Solution :

1. Déjà, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{1}{n} \geq 0$ donc 0 est un minorant de A. Montrons maintenant que 0 est le plus petit de ces minorants. Cela revient à montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $0 + \varepsilon = \varepsilon$ n'est pas un minorant de A. Soit donc $\varepsilon > 0$, montrons que ε n'est pas un minorant de A. Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut trouver[2] $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand pour que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Ainsi il existe un élément de A strictement plus petit que ε, donc ε n'est pas un minorant de A. Finalement, on a bien montré que $\inf(A) = 0$.
2. À faire pour s'entraîner.

Enfin, on admet le théorème suivant :

Théorème 5
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure. Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Remarque : Ce théorème permet de démontrer qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui est croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) converge en considérant l'ensemble (non vide) $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Dans le cas où (u_n) est croissante et majorée, l'ensemble A est majoré et on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup(A)$. Dans le cas où (u_n) est décroissante et minorée, l'ensemble A est minoré et on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf(A)$.

2. Il faut pour cela que $n > \frac{1}{\varepsilon}$, on peut donc prendre $n = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$.