
Devoir maison n°5
À rendre le lundi 6 janvier 2025
Une copie par élève obligatoirement.

Exercice 1.

À faire après avoir repris sa copie de DS 3 avec le corrigé en ligne.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $S_n = \sum_{k=0}^n 5^k 2^{n-k}$. On propose de démontrer de plusieurs manières que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$(*) : S_n = \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3}$$

1. Démontrer la formule (*) pour $n \in \{0, 1, 2\}$.
2. Démontrer la formule (*) pour tout $n \in \mathbb{N}$ en se ramenant à une somme géométrique.
3. Démontrer la formule (*) par récurrence. On commencera par établir une relation de récurrence entre S_{n+1} et S_n .
4. On propose d'écrire que : $3S_n = 5S_n - 2S_n$. En déduire la formule (*) grâce à un télescopage.

Exercice 2.

Faire l'étude complète des fonctions suivantes. Écrire ensuite un programme Python permettant de tracer le graphe de ces fonctions, et vérifier ainsi vos résultats. *On n'écrira qu'un seul des programmes sur la copie.*

1. $f : x \mapsto \sqrt{1 + e^{-x}}$
2. $g : x \mapsto \frac{x}{1 - x^2}$