Exercice 1

1. Vérifier que $(1,-2,-1)$ est solution du système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & 4 \\ 2x & & & + & z & = & 1 \\ -x & - & 2y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$
2. Vérifier que pour toute valeur de $z \in \mathbb{R}$ le triplet $(1+z, 3z-1, z)$ est solution de $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ -x & + & y & - & 2z & = & -2 \\ x & & & - & z & = & 1 \end{array}\right.$
3. Vérifier que pour toutes valeurs de $y, t \in \mathbb{R}$ le quadruplet $(1+\frac{y}{2}+\frac{t}{2}\ ,\ y\ ,\ -2+\frac{y}{2}-\frac{3t}{2}\ ,\ t)$ est solution de $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & -1 \\ 3x & - & y & - & z & - & 3t & = & 5 \end{array}\right.$

Exercice 2

Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{l} 2z-y-2=0 \\ x+y+z+1=0 \\ 6-3z=0 \end{array}\right.$$

$$(S_2) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & - & 2x_5 & + & 2x_6 & = & -1 \\ & & & & 5x_3 & + & 5x_4 & - & 3x_5 & + & 2x_6 & = & 1 \\ & & & & & & & & 3x_5 & + & 2x_6 & = & -3 \\ & & & & & & & & & & 2x_6 & = & -6 \end{array}\right.$$

$$(S_3) : \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 5y & = & 15 \\ x & - & 5y & = & 5 \end{array}\right. \quad \textit{(On proposera deux méthodes)}$$

Exercice 3

Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & 2y & - & 5z & = & 0 \\ & & & & 3z & = & 6 \end{array}\right.$$

$$(S_2) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & y & - & z & & & = & 1 \\ & & & & 2z & + & t & = & -1 \end{array}\right.$$

Exercice 4

Dans une ferme élevant des lapins et des poulets, il y a au total 27 animaux et 72 pattes d'animaux. Combien y a-t-il de lapins et de poulets ?

Exercice 5

Au marché de Saint-Maur-des-Fossés, on peut trouver des poireaux, des tomates et des oranges sanguines.

Riri achète 1 kilogramme de poireaux, 1 kilogramme de tomates et 1 kilo d'oranges, et paye au total 8 euros. Fifi achète 1 kilogramme de poireaux, 2 kilogrammes de tomates et 3 kilogrammes d'oranges, et paye au total 17 euros. Loulou achète 2 kilogrammes de poireaux, 4 kilogrammes de tomates et 5 kilogrammes d'oranges, et paye finalement 31 euros.

Déterminer le prix au kilo des poireaux, des tomates et des oranges sanguines.

Exercice 6
Complétez les systèmes suivants (au crayon de bois !) en effectuant les opérations indiquées. Terminez ensuite la résolution.

1)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 4y & + & 6z & = & 8 \\ 3x & - & y & - & 2z & = & -7 \\ x & + & 3y & + & z & = & -4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & & & & & \\ 3x & - & y & - & 2z & = & -7 \\ x & + & 3y & + & z & = & -4 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} (L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ (L_2 \leftrightarrow L_3) \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ & & y & - & 2z & = & -8 \\ & & & & & & \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ (L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2) \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rc} x & = \\ y & = \\ z & = \end{array}\right.$$

2)

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 5 \\ x & + & y & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} & & & & \\ & & & & \end{array}\right. \quad (L_1 \leftrightarrow L_2)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ & & & & \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rc} x & = \\ y & = \end{array}\right.$$

3)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 4 \\ 5x & - & 4y & - & 3z & = & 10 \\ -2x & - & 3y & + & z & = & 5 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 4 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ (L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1) \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ (L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2) \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rc} x & = \\ y & = \\ z & = \end{array}\right.$$

4)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & -1 \\ x & - & y & + & z & = & -1 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & & & & & \\ x & - & y & + & z & = & -1 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} (L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & \frac{3}{2}y & + & \frac{1}{2}z & = & -\frac{1}{2} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & \frac{3}{2}y & + & \frac{1}{2}z & = & -\frac{1}{2} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ (L_2 \leftarrow 2L_2) \\ (L_3 \leftarrow 2L_3) \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & \frac{3}{2}y & + & \frac{1}{2}z & = & -\frac{1}{2} \\ & & y & + & z & = & -1 \\ & & & & & & \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 11L_2) \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rc} x & = \\ y & = \\ z & = \end{array}\right.$$

5)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & -1 \\ x & - & y & + & z & = & -1 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} & & & & & & & (L_1 \leftrightarrow L_2) \\ & & & & & & & \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 3 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & y & + & z & = & -1 & \\ & & & & & & & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & & & & & & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & y & + & z & = & -1 & \\ & - & y & - & z & = & 1 & \\ & & & & & & & (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x = \\ y = \\ z = \end{array}\right.$$

Avez-vous remarqué que les systèmes 4) et 5) sont les mêmes ? Quelle méthode de résolution avez-vous préféré ?

Exercice 7

Résoudre les systèmes suivants par la méthode du pivot de Gauss.

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \\ 2x & + & 5y & - & 8z & = & 4 \\ 3x & + & 8y & - & 11z & = & 7 \end{array}\right.$$

$$(S_2) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & - & 4z & = & 2 \\ 4x & - & 2y & - & 6z & = & 5 \\ 6x & - & 3y & - & 8z & = & 8 \end{array}\right.$$

$$(S_3) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & + & 4y & + & 7z & = & 4 \end{array}\right.$$

$$(S_4) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & - & t & = & 2 \\ 2x & - & 2y & + & 4z & - & t & = & 4 \\ x & + & y & + & z & - & 3t & = & -1 \\ & & & & -z & + & t & = & -3 \end{array}\right.$$

$$(S_5) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & y & - & z & = & 3 \\ 5x & + & 5y & - & 9z & = & 7 \\ 2x & - & 6y & + & 14z & = & -2 \end{array}\right.$$

$$(S_6) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & y \\ & & -2y & - & 6z & = & x \\ 4x & - & 4y & - & 8z & = & z \end{array}\right.$$

$$(S_7) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & -y \\ x & - & 2y & - & 6z & = & x \\ 6x & - & 3y & - & 2z & = & 1 - 2z \end{array}\right.$$

$$(S_8) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & - & y & + & z & & & = & 0 \\ x & & & + & z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 8
Résoudre le système à n inconnues et n équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & \dots & + & 2x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \dots & + & 3x_n & = & 1 \\ & \vdots & & & & & & & & \vdots & \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \dots & + & nx_n & = & 1 \end{array}\right.$$

On commencera par s'assurer d'avoir bien compris ce que signifient les pointillés.

Exercice 9
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S_0) : \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & a \\ x & - & y & = & b \end{array}\right.$$

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ x & + & 4y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & y & - & 7z & = & a \end{array}\right.$$

$$(S_2) : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 4y & + & 5z & = & a \\ & & 2y & + & 3z & = & 2 \\ 2x & + & 5y & + & 6z & = & b \end{array}\right.$$

$$(S_3) : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & - & 2y & + & az & = & b \end{array}\right.$$

Exercice 10
Déterminer les solutions des systèmes suivants en fonction du paramètre réel λ.

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & \lambda x \\ x & + & y & + & z & = & \lambda y \\ x & + & y & + & z & = & \lambda z \end{array}\right.$$

$$(S_2) : \left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & - & 2z & = & \lambda x \\ 2x & - & y & - & 4z & = & \lambda y \\ -x & + & y & + & 3z & = & \lambda z \end{array}\right.$$

Exercice 11
Déterminer les solutions des systèmes suivants en fonction du paramètre réel m.

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{ccccc} (m-1)x & - & my & = & m \\ (m+1)x & + & (m+1)y & = & m^2-1 \end{array}\right.$$

$$(S_2) : \left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & z & = & m \\ x & + & y & + & mz & = & 2m \\ x & + & my & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$