

Comment calculer une intégrale ?

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(t) dt = \left[F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f c'est-à-dire que $F' = f$.

Exercice 1 (premiers exemples)

Il faut connaître des primitives des fonctions simples (polynômes, exponentielle, cosinus, sinus). Pour cela, il faut “lire à l'envers” le tableau donné dans la feuille de cours sur les dérivées usuelles.

- $\int_0^5 e^t dt = \left[\quad \right]_0^5 = \quad$ car $F(t) = \quad$ vérifie $F'(t) = \quad$
- $\int_0^1 t dt = \left[\quad \right]_0^1 = \quad$ car $F(t) = \quad$ vérifie $F'(t) = \quad$
- $\int_{-2}^3 5 dt = \left[\quad \right] = \quad$ car $F(t) = \quad$ vérifie $F'(t) = \quad$
- $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(t) dt = \left[\quad \right] = \quad$ car $F(t) = \quad$ vérifie $F'(t) = \quad$
- $\int_{\pi}^{2\pi} \sin(t) dt = \left[\quad \right] = \quad$ car $F(t) = \quad$ vérifie $F'(t) = \quad$

Exercice 2 (par linéarité)

Si f et g sont continues sur $[a, b]$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\int_a^b f(t) + \lambda g(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \lambda \int_a^b g(t) dt.$$

Ainsi, si $F' = f$ et $G' = g$ sur $[a, b]$ alors on peut écrire au choix :

$$\int_a^b f(t) + \lambda g(t) dt = \begin{cases} \left[F(t) + \lambda G(t) \right]_a^b = \\ \text{ou} \\ \int_a^b f(t) dt + \lambda \int_a^b g(t) dt = \left[F(t) \right]_a^b + \lambda \left[G(t) \right]_a^b = \end{cases}$$

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_2^3 2t + 1 dt$
2. $\int_1^2 t^2 dt$
3. $\int_{-1}^1 2e^t - 4t^3 dt$
4. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \cos(t) - \sin(t) dt$
5. $\int_0^1 1 + t^{10} dt$

Exercice 3 (en $F(ct + d)$)

Soient $c, d \in \mathbb{R}$ des constantes fixées, avec $c \neq 0$.

Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et si F est telle que $F' = f$ sur $\mathbb{R}$, alors en posant

$$G(t) = F(ct + d) \text{ on a } G'(t) =$$

donc pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(ct + d) dt = \left[\quad \quad \quad \right]_a^b =$$

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 e^{2t+1} dt$
2. $\int_0^1 \sin(2\pi t) dt$
3. $\int_{-2}^2 e^{-\frac{t}{2}} dt$
4. (sans développer le carré) $\int_{-1}^1 3(1 + 2t)^2 dt$
5. $\int_1^3 (1 - 3t)^3 dt$

Exercice 4 (mais qui est la variable ?)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 t^2 x dt$
2. $\int_1^2 t^2 x dx$
3. $\int_{T_0}^{T_1} e^{-\frac{t}{\tau}} dt$
4. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\omega t + \varphi) dt$
5. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(\omega x + \varphi) d\varphi$

Exercice 5 (pour s'entraîner)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 6t^5 dt$
2. $\int_0^1 t^7 dt$
3. $\int_{-2}^1 e^{2t} - t dt$
4. $\int_{-1}^1 2 \cos(\pi x) + x^2 dx$
5. $\int_1^2 (1 - x)^{10} dx$
6. $\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} e^{-2s+1} ds$