

DM 5 - Corrigé

Exercice 1

1) Pour $n=0$, $S_0 = \sum_{k=0}^0 5^k 2^{0-k} = 5^0 2^0 = 1$ et $\frac{5^{0+1} - 2^{0+1}}{3} = \frac{5-2}{3} = 1$

Pour $n=1$, $S_1 = \sum_{k=0}^1 5^k 2^{1-k} = 5^0 2^1 + 5^1 2^0 = 2+5=7$ et $\frac{5^{1+1} - 2^{1+1}}{3} = \frac{25-4}{3} = 7$

Pour $n=2$, $S_2 = \sum_{k=0}^2 5^k 2^{2-k} = 5^0 2^2 + 5^1 2^1 + 5^2 2^0 = 4+10+25=39$

et $\frac{5^{2+1} - 2^{2+1}}{3} = \frac{125-8}{3} = 39$.

Donc la formule (*) est vraie pour $n \in \{0, 1, 2\}$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n 5^k 2^{n-k} = 2^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{5}{2}\right)^k = 2^n \times \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{5}{2} - 1} \\ &= 2^n \times \frac{\frac{5^{n+1}}{2^{n+1}} - 1}{\frac{3}{2}} = \frac{2^{n+1} \left(\frac{5^{n+1}}{2^{n+1}} - 1\right)}{3} = \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3} \end{aligned}$$

3) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} 5^k 2^{n+1-k} = 2 \sum_{k=0}^{n+1} 5^k 2^{n-k} = 2 \left(\sum_{k=0}^n 5^k 2^{n-k} + 5^{n+1} 2^{n-(n+1)} \right) \\ &= 2 \left(S_n + \frac{5^{n+1}}{2} \right) = 2S_n + 5^{n+1}. \end{aligned}$$

Démontrons alors (*) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

Pour $n=0$, on a vu à la question 1 que (*) était vraie

Supposons que (*) est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$S_{n+1} = 2S_n + 5^{n+1} = 2 \times \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3} + 5^{n+1}$$

$$= \frac{2 \times 5^{n+1} - 2 \times 2^{n+1} + 3 \times 5^{n+1}}{3} = \frac{5^{n+2} - 2^{n+2}}{3} \quad \text{ce qu'il fallait démontrer}$$

Ainsi (*) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$3S_n = 5S_n - 2S_n = 5 \sum_{k=0}^n 5^k 2^{n-k} - 2 \sum_{k=0}^n 5^k 2^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n 5^{k+1} 2^{n-k} - \sum_{k=0}^n 5^k 2^{n+1-k}$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} 5^j 2^{n-(j-1)} - \sum_{k=0}^n 5^k 2^{n+1-k} \quad \left(\begin{array}{l} \text{via } j=k+1 \text{ donc } k=j-1 \\ \text{et } 0 \leq k \leq n \Leftrightarrow 1 \leq j \leq n+1 \end{array} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} 5^k 2^{n+1-k} - \sum_{k=0}^n 5^k 2^{n+1-k}$$

$$= 5^{n+1} 2^{n+1-(n+1)} - 5^0 2^{n+1-0}$$

$$= 5^{n+1} - 2^{n+1} \quad \text{donc} \quad S_n = \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3}$$

Exercice 2

1) La fonction f est définie sur $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1+e^{-x} > 0\}$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ donc $D_f = \mathbb{R}$. De même f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, 1+e^{-x} > 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

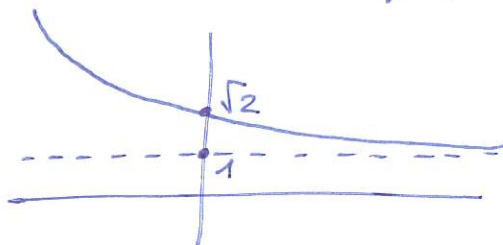
$$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{2\sqrt{1+e^{-x}}} < 0 \quad \text{donc } f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

et comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

D'où le tableau de variations et le graphique suivants :

x	$-\infty$	$+\infty$
f'		-
f	$+\infty$	1



2) La fonction g est définie et dérivable sur $D_g = \{x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \neq 0\}$

Comme, pour $x \in \mathbb{R}$, $1-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$, on a en fait $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Cet ensemble est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, g(-x) = \frac{-x}{1-(-x)^2} = -\frac{x}{1-x^2} = -g(x)$$

donc g est impaire. Dans la suite on l'étudie uniquement sur $D_g \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, g'(x) = \frac{1(1-x^2) - x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} > 0$$

donc g est croissante sur $[0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

en 1^- : $x \rightarrow 1$ et $1-x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0^+$ car si $x < 1$ alors $x^2 < 1$ donc $1-x^2 > 0$

$$\text{donc } g(x) = \frac{x}{1-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$$

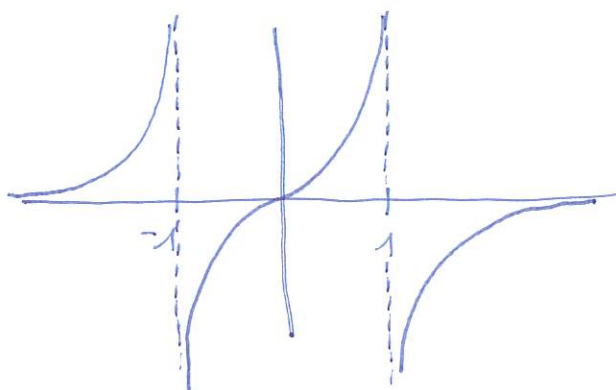
en 1^+ : $x \rightarrow 1$ et $1-x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 0^-$ car si $x > 1$ alors $x^2 > 1$ donc $1-x^2 < 0$

$$\text{donc } g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} -\infty$$

en $+\infty$: $g(x) = \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{\frac{1}{x} - x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ car $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $\frac{1}{x} - x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$.

Comme g est impaire on a aussi $g(0)=0$ (et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = +\infty$ par symétrie), d'où le tableau de variations et le graphique suivant, complété par symétrie par rapport à l'origine.

x	0	1	$+\infty$
g'	+		+
g	0	$+\infty$ $-\infty$	0



Pour le programme Python, voir le cours.

