

Exercice 6

Complétez les systèmes suivants (au crayon de bois!) en effectuant les opérations indiquées. Terminez ensuite la résolution.

1)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x + 4y + 6z = 8 \\ 3x - y - 2z = -7 \\ x + 3y + z = -4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 & (L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1) \\ 3x - y - 2z = -7 \\ x + 3y + z = -4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -7y - 11z = -19 & (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \\ y - 2z = -8 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -8 & (L_2 \leftrightarrow L_3) \\ -7y - 11z = -19 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -8 \\ -25z = -75 & (L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 4 - 3z - 2y = 4 - 9 + 4 = -1 \\ y = -8 + 2z = -8 + 6 = -2 \\ z = 3 \end{cases} \\ & \mathcal{S}_1 = \{(-1, -2, 3)\} \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \quad (L_1 \leftrightarrow L_2) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + y = 1 \\ -3y = 3 \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1 - y = 2 \\ y = -1 \end{cases} \\ & \mathcal{S}_2 = \{(2, -1)\} \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 5x - 4y - 3z = 10 \\ -2x - 3y + z = 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - y + z = 4 \\ y - 8z = -10 & (L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1) \\ -5y + 3z = 13 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - y + z = 4 \\ y - 8z = -10 \\ -37z = -37 & (L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 4 - z + y = 4 - 1 - 2 = 1 \\ y = -10 + 8z = -2 \\ z = 1 \end{cases} \\ & \mathcal{S}_3 = \{(1, -2, 1)\} \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x - y + z = -1 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2} & (L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1) \\ x - y + z = -1 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2} & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ \frac{11}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{9}{2} & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2} \\ y + z = -1 & (L_2 \leftarrow 2L_2) \\ 11y + z = 9 & (L_3 \leftarrow 2L_3) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2} \\ y + z = -1 \\ -10z = 20 & (L_3 \leftarrow L_3 - 11L_2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z + \frac{3}{2}y = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 2 \\ y = -1 - z = 1 \\ z = -2 \end{cases} \\ & \mathcal{S}_4 = \{(2, 1, -2)\} \end{aligned}$$

5)

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x - y + z = -1 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases} \quad (L_1 \leftrightarrow L_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = -1 \\ -y - z = 1 \\ 4y - z = 6 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = -1 \\ -y - z = 1 \\ -5z = 10 \end{cases} \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + y - z = 2 \\ y = -(1 + z) = -1 + 2 = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_5 = \{(2, 1, -2)\}$$

Avez-vous remarqué que les systèmes 4) et 5) sont les mêmes? Quelle méthode de résolution avez-vous préféré?

Exercice 7

Résoudre les systèmes suivants par la méthode du pivot de Gauss.

$$(S_1) : \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 5y - 8z = 4 \\ 3x + 8y - 11z = 7 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} 2x - y - 4z = 2 \\ 4x - 2y - 6z = 5 \\ 6x - 3y - 8z = 8 \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ 3x + 4y + 7z = 4 \end{cases}$$

$$(S_4) : \begin{cases} x - y + z - t = 2 \\ 2x - 2y + 4z - t = 4 \\ x + y + z - 3t = -1 \\ -z + t = -3 \end{cases}$$

$$(S_5) : \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 3x + y - z = 3 \\ 5x + 5y - 9z = 7 \\ 2x - 6y + 14z = -2 \end{cases}$$

$$(S_6) : \begin{cases} 2x - y + 3z = y \\ -2y - 6z = x \\ 4x - 4y - 8z = z \end{cases}$$

$$(S_7) : \begin{cases} 2x - y + z = -y \\ x - 2y - 6z = x \\ 6x - 3y - 2z = 1 - 2z \end{cases}$$

$$(S_8) : \begin{cases} 2x - 3y + z + t = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + z + t = 0 \end{cases}$$