

Feuille de cours 9.2 : rang d'un système linéaire

Si on s'autorise à modifier l'ordre “naturel” des pivots de la méthode de Gauss, on peut obtenir différentes présentations de l'ensemble des solutions.

Exemple : Résoudre

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x \quad \quad + z + t = 1 \\ 4x \quad \quad + 2z + t = 5 \end{cases}$$

Même s'il n'y a pas unicité de la réduite de Gauss d'un système linéaire, il y a unicité du nombre de variables principales (ou inversement de variables auxiliaires) qui y apparaissent :

Proposition 1 (admis)

Toutes les réduites de Gauss d'un système linéaire ont le même nombre d'inconnues principales (ou, en d'autres termes, de pivots). Ce nombre est appelé **rang du système**.

Exemple : Déterminer le rang des systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ y + z + t = 3 \\ z + t = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 2y + t = 4 \\ z + t = 3 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ 2x - 2y + z + t = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

4. Un système linéaire a pour ensemble de solutions

$$\mathcal{S} = \{(3 - y + t, y, -1, t, 4 + 2t - y), y, t \in \mathbb{R}\}.$$

Quel est son rang ?

Remarques :

- Les solutions d'un système à p inconnues et de rang r sont décrites par $p - r$ paramètres (ou variables auxiliaires).
- Un système linéaire carré à p inconnues est de Cramer si et seulement si il est de rang p .
- Le rang r d'un système linéaire à p inconnues et n équations satisfait :
 - $r \leq p$ (moins de variables principales que d'inconnues) ;
 - $r \leq n$ (moins de variables principales que d'équations).
- Le rang d'un système linéaire ne dépend pas de son second membre.

Exercice : Déterminer le rang des systèmes linéaires suivants en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

$$1. \begin{cases} x + y = 1 \\ x + a^2y = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ ax + y + z = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x & & - z = ax \\ 2x + 4y + 2z = ay \\ -x & & + 3z = az \end{cases}$$