Programme de colles : semaine 14, du 13/1 au 17/1

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Logique

Reprise du programme précédent.

2 Ensembles

- vocabulaire : élément, partie, ensemble vide ; descriptions d'ensembles : en extension, par équation et par paramétrage
- inclusion, égalité, principe de double inclusion : savoir montrer que $A \subset B$, via "soit $x \in A$ alors ... donc $x \in B$". Savoir montrer que $A \not\subset B$
- égalité d'ensembles : savoir montrer que $A = B$ par principe de double inclusion, ou en montrant que $x \in A \iff x \in B$
- union et intersection : associativité, union et intersection finies, exemple d'union et d'intersection infinies
- complémentaire et différence : on note $\overline{A} = E \backslash A$ le complémentaire de A dans E, et par définition $A \backslash B = A \cap \overline{B}$
- formules de De Morgan
- distributivité de $\cap$ et $\cup$
- produit cartésien $I \times J$ de deux ensembles I et J, représentation dans $\mathbb{R}^2$ dans le cas où $I, J \subset \mathbb{R}$. Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles
- ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble E
- majorants/minorants, maximum/minimum, bornes supérieure/inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure). *Nous n'avons pas fait d'exercice sur ce point.*

3 Systèmes linéaires

Nous avons fait des exercices avec des paramètres dans le second membre, mais pas dans les coefficients.
La notion de rang n'a pas encore été abordée en classe.
Aucune interprétation géométrique n'a été abordée en classe.

- définition d'un système linéaire, système homogène, échelonné, de Cramer, compatible
- résolution d'un système échelonné, notion de variables principales et auxiliaires
- algorithme du pivot de Gauss. *Sauf cas particulier où cela serait particulièrement judicieux, les élèves ne sont pas censés "échanger des colonnes" d'un système linéaire. Une telle opération est notamment prohibée si la consigne précise de résoudre un système "par la méthode du pivot de Gauss".*
- notion d'équation de compatibilité
- structure de l'ensemble des solutions : l'ensemble des solutions d'un système homogène est stable par addition et par multiplication par un scalaire ; les solutions d'un système quelconque s'écrivent comme solution particulière + solutions du système homogène
- exemples de systèmes linéaires dépendant d'un paramètre dans le second membre

4 Informatique en langage Python

Listes :

- parcours d'une liste par indices
- sous-listes `L[p:q]`, `L[p:]`, `L[:q]`, `L[p:q:r]` d'une liste `L`
- recherche d'un "facteur" dans une liste (exemple : recherche d'un mot dans un texte)

La modification et la suppression d'éléments n'ont pas encore été vus en classe.

5 Questions de cours

Cette semaine, les colles suivront le schéma suivant :

A) résolution d'un système linéaire à n équations et p inconnues (avec $n, p \in [\![1, 4]\!]$) sans paramètres

B) calcul d'une limite, ***attention, les croissances comparées n'ont pas été vues en classe.*** voir remédiation 8 : `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=5559`

C) calcul d'une intégrale du type $\int_a^b f(ct+d)\,dt$ où $c, d \in \mathbb{R}$ et f est une fonction simple, voir remédiation 9, exo 5 : `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=5609`

D) une question de cours issue de la liste ci-dessous

E) exercices au choix du colleur

1. Montrer par analyse-synthèse que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ il existe une unique fonction paire $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et une unique fonction impaire $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f = f_1 + f_2$.
2. Soient les ensembles $E = \{(t, 4t-1),\ t \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\}$. Montrer que $E = F$.
3. Soient les ensembles $A = \{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right),\ t \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 = 1\}$. Montrer que $A \subsetneq B$ *(attention, ici il y a deux questions en une)*. On considérera l'élément $(-1, 0)$.
4. Soient A et B deux parties de E. Montrer que $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$.
5. Soit $K = \{(0,1), (1,0)\}$. Démontrer par l'absurde qu'il n'existe pas de parties A et B de $\mathbb{R}$ telle que $K = A \times B$.
6. Soit $A \subset \mathbb{R}$. Donner la définition de "A est majorée" ou de "M est un majorant de A" ou de "s est la borne supérieure de A" ou des assertions similaires pour minorée/minorant/borne inférieure.
7. Écrire une fonction Python prenant en argument une liste `L = [`x_0`,`x_1`,...,`x_{n-1}`]` et renvoyant $\sum_{k=0}^{n-1} x_k 2^k$
8. Écrire une fonction Python `recherche` prenant en argument une liste L et un élément de type quelconque `a` et renvoyant l'indice de la première occurence de `a` dans la liste `L`. La fonction renverra `"introuvable"` si `a` n'est pas un élément de `L`.
9. On décrit un brin d'ADN par une liste dont les éléments sont toujours un des quatre caractères `"A"`, `"T"`, `"C"` et `"G"`. Le début d'un message génétique est généralement signalé par le codon `"A","T","G"`. Écrire une fonction `depart` qui prend en argument un brin d'ADN et renvoie l'indice du début du message génétique.
   Par exemple, `depart(["C","G","A","A","T","C","A","T","G","G","T","A"])` doit renvoyer `6`.
   La fonction renverra un message d'erreur si le codon de départ n'est pas présent dans le message génétique considéré.

La question de cours est notée sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.