

Exercice 1

1. Étudier la monotonie des suites suivantes :

- (a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 - n - 4$
- (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = 2^{-n} n!$
- (c) $w_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = w_n^2 - w_n + 1$
- (d) $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \sum_{k=1}^n \cos^2 \left(1 + \frac{k}{\pi} \right)$

2. On veut confirmer grâce à Python les résultats obtenus en 1) pour les suites (u_n) (petit (a)) et (w_n) (petit (c)). Pour cela on veut tracer le graphe de u_n (ou de w_n) en fonction de n . Testez vos codes sur vos propres ordinateurs pour confirmer les résultats obtenus en 1) !

- (a) Compléter le code suivant pour tracer le graphe de u_n en fonction de n pour $n \in \llbracket 0, 20 \rrbracket$. (Il y a exactement le bon nombre de lignes, mais aucune des lignes n'est complète).

```
1 import
2 absi = [ for k in ]
3 ordo = [k**2 - k - 4 for k in ]
4 plt.plot(
5 plt.show
```

- (b) Écrire une fonction prenant en argument n et renvoyant la liste $[w_0, w_1, w_2, \dots, w_n]$. En déduire un code Python permettant de tracer le graphe de w_n en fonction de n pour des valeurs de n que vous choisirez (pas trop grandes).

Exercice 2

Étudier la monotonie des suites suivantes.

- 1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -2 \left(\frac{3}{4} \right)^n$
- 2. $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n \sqrt{1 + v_n^2}$
- 3. $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \prod_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k} + 1}$
- 4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n \geq 2}$ la suite définie par

$$\forall n \geq 2, u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^k}$$

- 1. Montrer que $\forall n \geq 2, u_n \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k}$.
- 2. Montrer que (u_n) est convergente.

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}.$$

2. En déduire que la suite (S_n) ne converge pas.

Exercice 5

Soit (u_n) une suite bornée. Démontrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge vers 0.

Exercice 6

Étudier la limite des suites suivantes :

1. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k}$
2. $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{n^2 + k}{n^3 + k}$

Exercice 7

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$.

2. En déduire la limite la suite (u_n) donnée par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$, puis celle de la suite

$$(v_n) \text{ donnée par } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 8

Soit (x_n) la suite définie par $x_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$.

1. Démontrer que (x_n) est bien définie.
2. Étudier la limite de (x_n) .

Exercice 9

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est géométrique puis exprimer $u_n - v_n$ en fonction de n pour tout $n \geq 0$.
2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. Déterminer leur limite commune. (On pourra considérer l'expression $\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k$).

Exercice 10

Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Vrai ou Faux ? Démontrer ou donner un contre-exemple.

1. Si (u_n) est bornée alors elle converge.
2. Si (u_n) est croissante alors elle est minorée.
3. Si (u_n) et (v_n) sont bornées alors $(u_n + v_n)$ est bornée.
4. Si (u_n) et (v_n) sont croissantes alors $(u_n v_n)$ est croissante.
5. Si (u_n) est décroissante et tend vers 0 alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

Exercice 11

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$.

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0 = a, b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad , \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

1. Démontrer que : $\forall x, y \geq 0, \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \geq a_n$.
3. Déterminer alors les sens de variation de (a_n) et (b_n) .
4. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent puis que leurs limites sont égales.

La limite commune de (a_n) et (b_n) est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b .

Exercice 12

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 < 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{u_n}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 0$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge.
4. Quelle équation doit satisfaire $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$? En déduire la valeur de cette limite.
5. Vérifiez votre réponse à la question précédente en écrivant un programme Python calculant les 50 premiers termes de la suite (u_n) et traçant son allure graphique. On prendra $u_0 = -1$.

Exercice 13

Soit $(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite ne prenant que des valeurs entières. On suppose que (u_n) converge. En revenant à la définition d'une suite convergente, montrer que (u_n) est stationnaire.

Exercice 14

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
2. Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que (u_n) est croissante.
4. Si (u_n) converge, quelle équation doit satisfaire sa limite? En déduire que (u_n) ne peut pas converger.
5. Qu'en déduit-on sur la suite (u_n) ?

Exercice 15

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Si (u_n) converge, quelle(s) valeur(s) peut prendre sa limite?
3. Démontrer que si $0 \leq u_0 \leq 1$ alors (u_n) est majorée par 1.
4. Conclure en déterminant, en fonction de la valeur de $u_0 \in \mathbb{R}^+$, le comportement de la suite (u_n) et la valeur de son éventuelle limite.

Exercice 16

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto \frac{1+x}{2\sqrt{x}}$.

1. Justifier que (u_n) est bien définie.
2. Étudier f sur $\mathbb{R}_*^+$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.
4. Déterminer le sens de variation de (u_n) .
5. En déduire que (u_n) converge. Quelle est sa limite?

Exercice 17

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto \frac{1}{x+2}$.

1. Justifier que (u_n) est bien définie.
2. Déterminer le sens de variation de f .
3. Montrer que les suites $(a_n) = (u_{2n})$ et $(b_n) = (u_{2n+1})$ sont monotones.
4. Si la suite (a_n) converge, quelle(s) valeur(s) peut prendre sa limite?
5. Finir l'étude de la suite (u_n) en montrant qu'elle converge.

Exercice 18

Déterminer les limites des suites suivantes :

1. (a) $u_n = \frac{2^n - \sqrt{n}}{n^2 + 2 \ln(n)}$

(b) $v_n = 4n - \sqrt{n^2 + 1}$

(c) $w_n = \frac{n! - 3^n}{n^2 + 5^n}$

(d) $x_n = \frac{\ln(n+1)}{n}$

(e) $y_n = \frac{\ln(1 + e^n)}{\sqrt{n}}$

2. (a) $u_n = 2^{n+1} \sin^2\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

(b) $v_n = \ln(\cos(1/n))$

(c) $w_n = n^2 \ln(\cos(1/n))$

(d) $x_n = \frac{\ln(1 + 2^{-n})}{\ln(1 + 3^{-n})}$

(e) $y_n = \frac{\ln(1 + \sqrt{n})}{\ln(1 + n^2)}$