

NOM :

PRENOM :

Question 1 (/5 pts). Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} 2x + 5y + z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ -3x - 4y - 5z = -1 \end{cases}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 5y + z = 3 \\ -3x - 4y - 5z = -1 \end{cases} \quad (L_1 \leftrightarrow L_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y - z = 1 \\ 2y - 2z = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y - z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y - z = 1 - 2(1+z) - z \\ y = 1+z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - 3z \\ y = 1+z \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{(-1-3z, 1+z, z), z \in \mathbb{R}\}$

$$(S_2) : \begin{cases} 2x + z + t = y - z \\ 4x - 2y + 3z + 2t = 2 + x \\ 2x - y + z + t = 1 + x \end{cases}$$

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z + t = 0 \\ 3x - 2y + 3z + 2t = 2 \\ x - y + z + t = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ 3x - 2y + 3z + 2t = 2 \\ 2x - y + 2z + t = 0 \end{cases} \quad (L_1 \leftrightarrow L_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ y - t = -1 \\ y - t = -2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ y - t = -1 \\ 0 = -1 \end{cases} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_2)$$

On a une équation de compatibilité non satisfaite donc l'ensemble des solutions est $\emptyset$.

Question 2 (/5 pts). Calculer les intégrales suivantes :

$$\bullet I_1 = \int_{-1/2}^{1/4} \frac{3}{2} dx$$

$$= \left[\frac{3}{2} x \right]_{-1/2}^{1/4} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$$

$$\bullet I_2 = \int_0^2 t + e^{-t} dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} - e^{-t} \right]_0^2 = \frac{2^2}{2} - e^{-2} - \left(\frac{0^2}{2} - e^{-0} \right) = 2 - e^{-2} - (-1) = 3 - e^{-2}$$

$$\bullet I_3 = \int_{-2}^3 \sin(\pi x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \right]_{-2}^3 = -\frac{1}{\pi} (\cos(3\pi) - \cos(-2\pi))$$
$$= -\frac{1}{\pi} (-1 - 1) = \frac{2}{\pi}$$

$$\bullet I_4 = \int_{-1}^1 e^{2t-1} dt$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{2t-1} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} (e^1 - e^{-3}) = \frac{e - e^{-3}}{2}$$

$$\bullet I_5 = \int_{-1}^0 (1+2x)^3 dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} (1+2x)^4 \right]_{-1}^0$$

$$= \frac{1}{8} (1^4 - (-1)^4) = 0$$

NOM :

PRENOM :

Question 1 (/5 pts). Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_3) : \begin{cases} 2x + 3y + z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ -3x - y - 5z = -1 \end{cases}$$

$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ -3x - y - 5z = -1 \end{cases} \quad (L_1 \leftrightarrow L_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \\ 2y - 2z = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y - z = 1 - (1 + z) - z \\ y = 1 + z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 1 + z \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{(-2z, 1+z, z), z \in \mathbb{R}\}$

$$(S_4) : \begin{cases} 2x - z + t = y + z \\ 4x - 2y - 3z = 2 + x \\ 2x - y - z - t = 1 + x \end{cases}$$

$$(S_4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 2z + t = 0 \\ 3x - 2y - 3z = 2 \\ x - y - z - t = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z - t = 1 \\ 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x - y - 2z + t = 0 \end{cases} \quad (L_1 \leftrightarrow L_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z - t = 1 \\ y + 3t = -1 \\ y + 3t = -2 \end{cases} \quad \begin{matrix} (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z - t = 1 \\ y + 3t = -1 \\ 0 = -1 \end{cases} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_2)$$

On a une équation de compatibilité non satisfaite donc l'ensemble des solutions est $\emptyset$.

Question 2 (/5 pts). Calculer les intégrales suivantes :

$$\bullet I_6 = \int_{-1/4}^{1/2} \frac{3}{2} dx$$

$$= \left[\frac{3}{2} x \right]_{-1/4}^{1/2} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4} \right) \right) = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$$

$$\bullet I_7 = \int_0^2 e^{2t} + t dt$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{2t} + \frac{t^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{2} e^4 + \frac{2^2}{2} - \left(\frac{1}{2} e^0 + \frac{0^2}{2} \right) \\ = \frac{e^4 + 3}{2}$$

$$\bullet I_8 = \int_{-3}^2 \cos(\pi x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \right]_{-3}^2 = \frac{1}{\pi} (\sin(2\pi) - \sin(-3\pi)) = \frac{0 - 0}{\pi} = 0$$

$$\bullet I_9 = \int_{-1}^1 e^{3t-2} dt$$

$$= \left[\frac{1}{3} e^{3t-2} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} (e^1 - e^{-5}) = \frac{e - e^{-5}}{3}$$

$$\bullet I_{10} = \int_{-1}^0 (2+3x)^3 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} (2+3x)^4 \right]_{-1}^0$$

$$= \frac{1}{12} (2^4 - (-1)^4)$$

$$= \frac{2^4 - 1}{12}$$

$$= \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$