Feuille de cours 10 : calculs de limites : techniques avancées

On renvoie aux feuilles de remédiation 7 et 8 pour les opérations sur les limites et la mise en facteur du terme dominant pour lever une forme indéterminée. On présente dans cette feuille de cours l'utilisation d'autres techniques plus avancées. **Ces techniques ne sont à utiliser que si les techniques plus simples n'ont pas fonctionné !**

1 Utilisation de la quantité conjuguée

Dans certains cas, mettre en facteur le terme dominant ne permet pas de lever l'indétermination. Par exemple :

Exemple : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (F.I de la forme $\infty - \infty$)
Si on essaie de mettre en facteur le terme le plus grand ($\sqrt{n+1}$), on n'arrive pas à lever l'indétermination :

$$u_n = \sqrt{n+1} \times \left(1 - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) = \sqrt{n+1} \times \left(1 - \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)$$

Or $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} = 0$.
Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$, on se retrouve face à une forme indéterminée du type $\infty \times 0$.

Dans le cas d'une différence de racines carrées, c'est-à-dire pour des expressions de la forme $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, il peut être utile de multiplier (et diviser) par $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, c'est-à-dire d'écrire que :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Exemple : pour $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ cela donne

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 1
Déterminer la limite de (u_n). Était-il toujours indispensable d'utiliser la quantité conjuguée ?

1. $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$
2. $u_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}$
3. $u_n = \sqrt{\ln(n)} - \sqrt{\ln(n+1)}$

2 Croissances comparées

On a vu que la technique usuelle pour lever une indétermination est de mettre en facteur le terme "dominant". Pour nous aider dans l'identification de ce terme (et pour conclure quant aux limites), on dispose des limites suivantes, appelées *"croissances comparées"* et que nous admettons :

Proposition 1
Soient $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$ alors on a :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$

Notation : Pour (u_n) et (v_n) deux suites réelles et non nulles à partir d'un certain rang, on note $u_n << v_n$ lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$. On dit dans ce cas que "v_n l'emporte sur u_n".

Ainsi on peut retenir que pour $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$: $\boxed{(\ln n)^\beta << n^\alpha << a^n}$
(les exponentielles l'emportent sur les puissances qui l'emportent sur les logarithmes.)
On a donc aussi $a^n >> \ln(n)^\beta$ c'est-à-dire que :

Exemples :

- $\dfrac{n}{e^n}$
- $\dfrac{\ln(n)}{n}$
- $n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
- $\dfrac{2^n}{\sqrt{n}}$
- $\dfrac{\ln(n)}{3^n}$

Attention à ne pas mentionner de croissance comparée là où il n'y en n'a pas.
Par exemple, $\dfrac{1}{ne^n}$

On utilise ensuite ces croissance comparées pour factoriser par le terme dominant comme précédemment :

Exercice 2
Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de (u_n).

1. $u_n = \dfrac{n^3 - \sqrt{n}}{n^3 + \ln n}$
2. $u_n = \dfrac{3^n - n^2}{\ln(n) + n}$
3. $u_n = n^2 \ln(n) - n \ln(n)^2$
4. $u_n = \cos(2^{-n}) \times \sin(\ln(n)2^{-n})$
5. $u_n = \dfrac{n^2 + 3^n}{n - 3^n}$
6. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n}$
7. $u_n = \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$

3 Forme exponentielle pour les puissances

Pour déterminer la limite d'une suite de la forme $(a_n^{b_n})$ il faut *obligatoirement* repasser par la forme exponentielle, c'est-à-dire écrire $a_n^{b_n} =$

Exemples : $u_n = n^{\frac{1}{n}}$

$v_n = \left(\dfrac{4n}{2n-1}\right)^{2n-1}$

Remarque : Attention, ne pas revenir à la forme exponentielle peut mener à des erreurs. Par exemple : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

Version fausse 1 :

Version fausse 2 :

Version juste :

4 Équivalents

4.1 Définition

Définition 2
Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites réelles non nulles à partir d'un certain rang. On dit que <u>u_n est équivalent à v_n</u> et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ lorsque $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exemple : $n^2 + n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$ car

Remarque : Dans tout ce paragraphe on considère des suites non nulles à partir d'un certain rang, typiquement des suites à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$.

Proposition 3
Pour $(u_n) \in \mathbb{R}^N$ et $\ell \in \mathbb{R}^*$ on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell \iff u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

dém :

Attention : écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} +\infty$ n'a pas de sens. C'est justement lorsque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ qu'on s'intéresse à trouver un équivalent de u_n.

Proposition 4
Pour $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites on a :

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ *(réflexivité)*,
2. si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ *(symétrie)*,
3. si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ *(transitivité)*.

dém :

Proposition 5
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

dém :

Ainsi, pour trouver une limite d'une suite u_n "compliquée", on peut chercher un équivalent v_n de u_n qui soit "plus simple", puis déterminer plutôt la limite de v_n.

En revanche, attention à ne pas confondre limite et équivalents. Par exemple, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors on n'a pas forcément $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. En effet,

4.2 Opérations sur les équivalents

La notion d'équivalence est adaptée aux multiplications, divisions et puissances :

Proposition 6
Si (u_n), (v_n), (u'_n) et (v'_n) sont telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u'_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n$ alors :

1. $u_n \times v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u'_n \times v'_n$,
2. $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u'_n}{v'_n}$,
3. pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} {u'_n}^\alpha$.

dém :

Exemple : $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ (car) donc $\sqrt{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

Attention ! On ne peut pas sommer des équivalents
par exemple, $n^2+n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2+1$ (car) et $-n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} -n^2$
mais

Proposition 7
Si $u_n >> v_n$ alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

dém :

Exemples :

- $n^2 + \ln(n) \sim$
- Pour un polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_d X^d$ avec $a_d \neq 0$ on a $P(n) \sim$
- Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^3 - n^2 + 1}{3n^2 - n - 2}$?

Remarque : on ne peut pas appliquer une fonction quelconque à un équivalent c'est-à-dire qu'en général :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \not\Longrightarrow f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(v_n)$$

C'est vrai pour certaines fonctions, par exemple avec

C'est faux de manière générale, par exemple

4.3 Équivalents usuels

Proposition 8

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en 0 et telle que $f'(0) \neq 0$. Alors

$$f(u_n) - f(0) \underset{n\to+\infty}{\sim} f'(0) u_n.$$

dém :

En appliquant ce théorème, on obtient les équivalent usuels suivants (à connaître) :

Proposition 9
Pour (u_n) une suite telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a :

1. $e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
2. $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
3. $\sqrt{1+u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}u_n$ (et plus généralement, pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$)
4. $\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
5. $\tan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
6. $\cos(u_n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2}u_n^2$

Remarque : Pour retenir ces formules, pensez à vérifier qu'elles sont cohérentes en termes de limites. Par exemple, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il est peu probable que $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ puisque

dém : pour les formules 1) à 5) on applique le théorème précédent. Par exemple, pour 1) :

Pour la 6), si on peut écrire que $\cos(u_n) - 1 = \cos(u_n) - \cos(0)$, on n'a en revanche $\cos'(0) = \sin(0) = 0$ donc le théorème ne s'applique pas (puisqu'on ne peut de toute façon pas écrire ~ 0 !). On utilise plutôt la formule de trigonométrie suivante : $\cos(u_n) - 1 = \cos(2\frac{u_n}{2}) - 1 = -2\sin^2(\frac{u_n}{2})$. Or $\frac{u_n}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sin(\frac{u_n}{2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n}{2}$ donc $\sin^2(\frac{u_n}{2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{4}$ donc $\cos(u_n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -2 \times \frac{u_n^2}{4} = -\frac{1}{2}u_n^2$.

Exemples d'utilisation :

- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 \ln(1+\dfrac{1}{n^2})$

- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n \tan\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}\right)$

- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) \times \sin\left(e^{1/n}-1\right)$

Entraînement

Exercice 3

Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \ln(n) - \sqrt{n}$
2. $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{2n+3}$
3. $u_n = \dfrac{2^n - 3^{n+1}}{2^n - \ln(n)}$
4. $u_n = \dfrac{\ln(n^3+1)}{n^2}$
5. $u_n = \sqrt[n]{n^2}$ (quelle est la définition de $\sqrt[n]{x}$ donnée dans le cours ?)
6. $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$
7. $u_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n^2}}$

Exercice 4

Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$
2. $u_n = \left(\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)^n$
3. $u_n = n\tan\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
4. $u_n = n\tan\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$