
Mathématiques - mercredi 22 janvier 2025
Devoir n$^{\text{o}}$5 Durée : 2 h 30 min

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Les qualités de rédaction (clarté des raisonnements, lisibilité, orthographe...) seront sensiblement prises en considération dans l'évaluation des copies.**
- **Le sujet comporte 2 pages et 5 exercices.**

Exercice 1 (cours)**.**

1. Soit (u_n) une suite réelle. Donner la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.
2. On définit les ensembles
$$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x+y=1\} \quad \text{et} \quad F = \{(\frac{t}{2}, 1-t),\ t\in\mathbb{R}\}.$$
Montrer que $E = F$.
3. Écrire une fonction Python `indmax` prenant en argument une liste de nombres et renvoyant l'indice de son plus grand élément.

Exercice 2 (calculs)**.**

1. (a) Calculer $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/4} \sin(2\pi x)\, dx$.
   (b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 e^{1-2x} + \frac{1}{2}\, dx$.
2. (a) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{1-x}{4-x^2}$.
   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^{-x})}{x^3-2x}$.
3. Pour $\lambda\in\mathbb{R}$ on considère le système linéaire suivant :
$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & - & z & = & \lambda x \\ & & y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 3z & = & \lambda z \end{array}\right.$$
   (a) Résoudre le système (S) en fonction de la valeur de λ.
   (b) Sans justifier, préciser le rang du système dans chacun des cas distingués à la question précédente.

Exercice 3 (une suite)**.**
On considère la suite u définie par
$$u_0 \in]0,1[\ \text{ et } \ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \in]0,1[$.
2. Montrer que la suite u est convergente.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 4 (séries alternées)**.**
On considère une suite $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n > 0$, (x_n) est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ on note

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x_k}.$$

On considère enfin les suites $(u_n) = (S_{2n})$ et $(v_n) = (S_{2n+1})$.

1. (a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   (b) En déduire que (S_n) converge.
2. On suppose que les 100 premiers termes de la suite (x_n) sont stockés dans une liste Python `L`. On a donc `L = [`x_0`, `x_1`, `x_2`, ..., `x_{99}`]`.
   (a) Écrire une fonction Python `somme` prenant en argument la liste `L` et un entier n compris entre 0 et 99, et renvoyant S_n.
   (b) Écrire une fonction Python `liste_somme` prenant en argument la liste `L` et renvoyant la liste `[`S_0`, `S_1`, `S_2`, ..., `S_{99}`]`.
   (c) Comment obtenir les listes `[`u_0`, `u_1`, `u_2`, ..., `u_{49}`]` et `[`v_0`, `v_1`, `u_2`, ..., `v_{49}`]` grâce à la fonction précédente? En déduire un programme Python permettant de tracer le graphe de S_n en fonction de n pour $n \in [\![0,99]\!]$ en dessinant en rouge les termes de (u_n) et en bleu ceux de (v_n). *On utilisera la commande* `plt.plot(absi,ordo,'r')` *pour tracer un graphe en rouge, et la commande* `plt.plot(absi,ordo,'b')` *pour tracer un graphe en bleu.*

Exercice 5 (ensembles)**.**
Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on s'intéresse aux parties de $[\![1,n]\!]$. Pour tout ensemble $A \subset [\![1,n]\!]$, on note $s(A)$ la somme de tous les éléments de A. Par exemple, pour $n = 7$ et $A = \{2,5,6\}$ on a $s(\{2,5,6\}) = 2+5+6 = 13$. On pose de plus par convention $s(\emptyset) = 0$.

Les questions 1 à 3 de cet exercice sont indépendantes.

1. Dans cette question uniquement on fixe $n = 4$.
   Écrire alors en extension l'ensemble $K = \{A \subset [\![1,4]\!] \mid s(A) \leq 5\}$.
2. (a) Justifier brièvemennt que pour A et B deux parties de $[\![1,n]\!]$ on a :
   $$A \subset B \implies s(A) \leq s(B).$$
   (b) Montrer que l'implication réciproque est fausse.
   (c) On note $S = \{s(A),\ A \subset [\![1,n]\!]\}$. Montrer que
   $$[\![0,2n-1]\!] \subset S \subset [\![0,\frac{n(n+1)}{2}]\!].$$
3. Soit $A \subset [\![1,n]\!]$.
   (a) Montrer par contraposée que si $s(A) \geq 2n$ alors A contient au moins 3 éléments.
   (b) De manière générale, pour $p \in [\![0,\frac{n(n+1)}{2}]\!]$, combien d'éléments compte A au minimum si $s(A) \geq p$? *On attend une réponse exprimée en fonction de p et de n.*