Exercice 1 :

1) On a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$ lorsque : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |u_n - 2| \leq \varepsilon$.

2) On procède par double inclusion.

$E \subset F$: Soit $(x,y) \in E$, alors on a $2x+y=1$. Posons $t = 2x$. On a alors $t+y=1$ donc $y = 1-t$. Donc $(x,y) = (\frac{t}{2}, 1-t) \in F$. Ainsi $E \subset F$.

$F \subset E$: Soit $(x,y) \in F$ alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) = (\frac{t}{2}, 1-t)$.
Donc $2x+y = 2\frac{t}{2} + 1 - t = 1$ donc $(x,y) \in E$. Ainsi $F \subset E$.

On a finalement $E \subset F$ et $F \subset E$ donc $E = F$.

3)
```
def indmax(L):
    n = len(L)
    maxi = L[0]
    ind = 0
    for k in range(1, n):
        if L[k] > maxi:
            maxi = L[k]
            ind = k
    return ind
```

Exercice 2 :

1) a) On a $\int_{-1/2}^{1/4} \sin(2\pi x)\,dx = \left[\frac{-\cos(2\pi x)}{2\pi}\right]_{-1/2}^{1/4}$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{2\pi}{2}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(0 - (-1)\right) = \boxed{-\frac{1}{2\pi}}$$

b) On a $\int_0^1 e^{1-2x} + \frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{e^{1-2x}}{-2} + \frac{1}{2}x\right]_0^1$

$$= \frac{e^{-1}}{-2} + \frac{1}{2} - \left(\frac{e^1}{-2} + 0\right) = \boxed{\frac{1 + e - e^{-1}}{2}}$$

2) a) On a $\lim\limits_{x \to 2^+} 1-x = -1$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} 4-x^2 = 0^-$ car si $x>2$ alors $x^2>4$ donc $4-x^2<0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1-x}{4-x^2} = \boxed{+\infty}$

b) On a $e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\ln(1+e^{-x}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln(1)=0$

et $x^3-2x = x^3\left(1-\frac{2}{x^2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ car $x^3 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $1-\frac{2}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^{-x})}{x^3-2x} = \boxed{0}$

3) a) On a :

$$(S) \iff \begin{cases} (3-\lambda)x - y - z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ -x + y + (3-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + y + (3-\lambda)z = 0 \\ y + 2z = 0 \quad (L_1 \leftrightarrow L_3) \\ (3-\lambda)x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + y + (3-\lambda)z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ (2-\lambda)y + (-1+(3-\lambda)^2)z = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + (3-\lambda)L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + y + (3-\lambda)z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ \Delta z = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda)L_2) \end{cases} \quad (*)$$

où $\Delta = -1+(3-\lambda)^2 - 2(2-\lambda)$

$= -1 + 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 4 + 2\lambda$

$= \lambda^2 - 4\lambda + 4$

$= (\lambda-2)^2$

On distingue donc 2 cas :

- <u>si $\lambda \neq 2$</u>, alors $\Delta \neq 0$ et donc

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + (3-\lambda)z = 0 \\ y = -2z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

donc l'ensemble des solutions dans ce cas est $\boxed{\mathcal{S} = \{(0,0,0)\}}$.

- <u>si $\lambda = 2$</u>, alors $\Delta = 0$ et donc

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + z = -z \\ y = -2z \end{cases}$$

donc l'ensemble des solutions dans ce cas est $\boxed{\mathcal{S} = \{(-z, -2z, z), z \in \mathbb{R}\}}$

b) En comptant le nombre de pivots, <u>si $\lambda \neq 2$</u>, le rang de (S) est $\boxed{3}$, et si <u>$\lambda = 2$</u> le rang de (S) est $\boxed{2}$.

<u>Exercice 3</u> :

1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
Pour $n = 0$, l'énoncé donne $u_0 \in]0,1[$.
Supposons que $0 < u_n < 1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors
$u_{n+1} = u_n - u_n^2 = u_n(1 - u_n)$ et $1 - 0 > 1 - u_n > 1 - 1$
On a donc $0 < u_n < 1$ et $0 < 1 - u_n < 1$, donc par produit
$0 < u_n(1 - u_n) < 1$ soit $0 < u_{n+1} < 1$ ce qu'il fallait démontrer.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$ donc <u>(u_n) est décroissante et minorée par 0</u> d'après la question 1). <u>Donc (u_n) converge</u> d'après le théorème de la limite monotone.

3) Notons $l = \lim_{n \to +\infty} u_n$. En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ on obtient $l = l - l^2$ donc $l^2 = 0$ donc $l = 0$. $\boxed{\text{Ainsi } u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$

Exercice 4 :

1) a) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

- $$u_{n+1} - u_n = S_{2(n+1)} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{x_k} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{x_k}$$
$$= \frac{(-1)^{2n+2}}{x_{2n+2}} + \frac{(-1)^{2n+1}}{x_{2n+1}}$$
$$= \frac{1}{x_{2n+2}} - \frac{1}{x_{2n+1}}$$

Or (x_n) est croissante donc $x_{2n+2} \geq x_{2n+1} > 0$
donc $\frac{1}{x_{2n+2}} \leq \frac{1}{x_{2n+1}}$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Ainsi (u_n) est décroissante.

- $$v_{n+1} - v_n = S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{x_k} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{x_k}$$
$$= \frac{(-1)^{2n+3}}{x_{2n+3}} + \frac{(-1)^{2n+2}}{x_{2n+2}}$$
$$= -\frac{1}{x_{2n+3}} + \frac{1}{x_{2n+2}}$$

De même, $x_{2n+3} \geq x_{2n+2} > 0$ donc $\frac{1}{x_{2n+3}} \leq \frac{1}{x_{2n+2}}$
donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$. Ainsi (v_n) est croissante.

- $$u_n - v_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{x_k} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{x_k} = -\frac{(-1)^{2n+1}}{x_{2n+1}} = \frac{1}{x_{2n+1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

car $x_{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. Ainsi $u_n - v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Finalement, $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes}}$

b) Les suites $(u_n) = (S_{2n})$ et $(v_n) = (S_{2n+1})$ sont adjacentes donc convergent vers la même limite : il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que :
$S_{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ et $S_{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$. Par conséquent : $\boxed{S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l}$

2) a)
```
def somme(L,n):
    S = 0
    for k in range(n+1):
        S = S + (-1)**k/L[k]
    return S
```

b)
```
def liste_somme(L):
    LS = []
    S = 0
    for k in range(100):
        S = S + (-1)**k/L[k]
        LS.append(S)
    return LS
```

c) Si LS = liste_somme(L) contient $[S_0, S_1, .., S_{99}]$ alors la liste $[u_0, u_1, .., u_{49}] = [S_0, S_2, .., S_{98}]$ est la sous-liste de LS formée des éléments d'indices pairs. On peut l'obtenir par $\boxed{\text{LS[0:100:2]}}$. De même $[v_0, v_1, .., v_{49}] = [S_1, S_3, .., S_{99}]$ est la sous-liste des éléments d'indices impairs ; on l'obtient par $\boxed{\text{LS[1:100:2]}}$

On propose donc le code suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
LS = liste_somme(L)
Lu = LS[0:100:2]
Lv = LS[1:100:2]
absi_u = [2*k for k in range(0,49)]
absi_v = [2*k+1 for k in range(0,49)]
plt.plot(absi_u, Lu, 'r')
plt.plot(absi_v, Lv, 'b')
plt.show()
```

Exercice 5 :

1) On a $K = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}\}$.

2) a) Supposons que $A \subset B$ et montrons que $s(A) \leq s(B)$, en distinguant 2 cas

- Si $A = B$ alors $s(A) = s(B)$.
- Si $A \subsetneq B$ alors on peut écrire $B = A \cup \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ où $b_1, b_2, \dots, b_k$ sont les éléments de B n'appartenant pas à A, et alors

$$s(B) = s(A) + b_1 + b_2 + \dots + b_k \geq s(A) \text{ car } b_1, \dots, b_k \geq 0.$$

b) Il faut donner un contre-exemple montrant que l'implication ($s(A) \leq s(B) \Rightarrow A \subset B$) est fausse. On peut prendre $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$, on a bien $s(A) = 1 \leq 2 = s(B)$ mais $A \not\subset B$.

c) Montrons d'abord que $[\![0, 2n-1]\!] \subset S$.

Soit $k \in [\![0, 2n-1]\!]$, il faut montrer qu'il existe $A \subset [\![1,n]\!]$ tel que $k = s(A)$. On distingue 3 cas :

- si $k = 0$, alors $A = \emptyset$ convient puisque $s(\emptyset) = 0$; ainsi $0 \in S$
- si $k \in [\![1,n]\!]$ alors $A = \{k\}$ convient puisque $s(\{k\}) = k$; ainsi $k \in S$

• si $k \in [\![n+1, 2n-1]\!]$ alors $A = \{n, k-n\}$ convient. En effet, comme $n+1 \leq k \leq 2n-1$ on a $1 \leq k-n \leq n-1$ donc $A \subset [\![1,n]\!]$ et $n \neq k-n$ de sorte qu'on a bien $s(A) = n + k - n = k$; ainsi $k \in S$

Dans tous les cas on a montré que $k \in S$. $\boxed{\text{Ainsi } [\![0, 2n-1]\!] \subset S.}$

<u>Montrons maintenant que $S \subset [\![0, \frac{n(n+1)}{2}]\!]$:</u>

Soit $k \in S$ alors il existe $A \subset [\![1,n]\!]$ tel que $k = s(A)$.

Comme $\emptyset \subset A \subset [\![1,n]\!]$, en utilisant la question 2)a) on obtient que $s(\emptyset) \leq s(A) \leq s([\![1,n]\!])$. Or $s(\emptyset) = 0$ et $s([\![1,n]\!]) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ donc $0 \leq s(A) \leq \frac{n(n+1)}{2}$ donc $k \in [\![0, \frac{n(n+1)}{2}]\!]$

Ainsi $S \subset [\![0, \frac{n(n+1)}{2}]\!]$.

3. a) Raisonner par contraposée revient ici à montrer que :
si A contient strictement moins de 3 éléments alors $s(A) < 2n$

Supposons donc que $A \subset [\![1,n]\!]$ contienne exactement 0, 1 ou 2 éléments et montrons que $s(A) < 2n$:

- si A ne contient aucun élément alors $A = \emptyset$ et
  $s(A) = s(\emptyset) = 0 < 2n$
- si A ne contient qu'un seul élément alors $A = \{k\}$ pour un certain $k \in [\![1,n]\!]$ et donc
  $s(A) = s(\{k\}) = k \leq n < 2n$ (car $n \geq 1$)
- si A contient exactement deux éléments alors on peut écrire $A = \{k_1, k_2\}$ avec $k_1 < k_2$ et $k_1, k_2 \in [\![1,n]\!]$, et alors
  $s(A) = s(\{k_1, k_2\}) = k_1 + k_2 < 2k_2 \leq 2n$
  donc $s(A) < 2n$

Dans tous les cas on a bien montré que $s(A) < 2n$.
Par contraposée cela prouve que si $s(A) \geq 2n$ alors A contient au moins 3 éléments.

b) La question revient à chercher quel est le nombre minimal d'éléments de $[\![1,n]\!]$ qu'il faut sommer pour obtenir une somme supérieure à p. Il est clair que pour minimiser le nombre de termes dans cette somme, il faut choisir les termes les plus grands possibles.

Or la plus grande somme qu'on puisse obtenir avec k termes de $[\![1,n]\!]$ est :

$$S_k = n+(n-1)+(n-2)+\dots+(n-k+1)$$

La question revient donc à déterminer le plus petit $k\in\mathbb{N}$ tel que $S_k \geq p$. Calculons donc S_k :

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1}(n-i) = \sum_{i=0}^{k-1} n - \sum_{i=0}^{k-1} i = nk - \frac{(k-1)k}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(-k^2+(2n+1)k\right)$$

Ainsi $S_k \geq p \iff -k^2+(2n+1)k \geq 2p$
$$\iff k^2-(2n+1)k+2p \leq 0 \quad (*)$$

Le discriminant de $X^2-(2n+1)X+2p$ est

$$\Delta = (2n+1)^2 - 8p$$

Comme $0 \leq p \leq \frac{n(n+1)}{2}$ on a $0 \geq -8p \geq -4n(n+1)$

donc $(2n+1)^2 \geq \Delta \geq (2n+1)^2 - 4n(n+1) = 1 \geq 0$

donc le polynôme admet deux racines réelles

$$k_1 = \frac{2n+1-\sqrt{\Delta}}{2} = n+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad k_2 = n+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

Comme $\Delta \leq (2n+1)^2$ on a $\sqrt{\Delta} \leq 2n+1$ et donc

$$k_2 \geq k_1 \geq n+\frac{1}{2}-\frac{2n+1}{2} \geq 0$$

Dès lors on a :

$$(*) \iff k_1 \leq k \leq k_2$$

avec $k_1 \geq 0$; donc le plus petit entier $k\in\mathbb{N}$ tel que

$S_k \geqslant p$ est le plus petit entier de $[k_1, k_2]$ i.e.
$\lceil k_1 \rceil$ (partie entière <u>supérieure</u> de k_1)

Finalement, si $s(A) \geqslant p$, alors on peut affirmer que A contient au minimum

$$\boxed{\left\lceil n + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{(2n+1)^2 - 8p}}{2} \right\rceil}$$ éléments.