Programme de colles : semaine 16, du 27/1 au 31/1

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Suites réelles

Les définitions des limites avec des quantificateurs doivent être connues, mais leur utilisation ne doit pas constituer le cœur des exercices demandés.

- monotonie (méthodes $u_{n+1} - u_n$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$)
- suites majorées, minorées, bornées
- suites convergentes :
 - définition avec des quantificateurs
 - unicité de la limite, toute suite convergente est bornée
 - (u_n) converge vers ℓ si et seulement si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ (*la notion générale de suite extraite n'a pas été étudiée en classe*)
 - passage à la limite des inégalités larges
 - théorème d'encadrement (ou des "gendarmes")
 - Si $|u_n| \leq \varepsilon_n$ et $\varepsilon_n \rightarrow 0$ alors $u_n \rightarrow 0$
 - théorème de la limite monotone
 - suites adjacentes
- limites infinies :
 - définition avec des quantificateurs
 - théorème de comparaison : si $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang alors : si $v_n \rightarrow +\infty$ alors $u_n \rightarrow +\infty$; et si $u_n \rightarrow -\infty$ alors $v_n \rightarrow -\infty$
 - toute suite croissante (resp. décroissante) non majorée (resp. non minorée) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)
- calculs pratiques de limites :
 - composition de limites, opérations algébriques, formes indéterminées
 - méthodes pour lever l'indétermination : factorisation par le terme dominant, quantité conjuguée, retour à l'exponentielle pour les puissances
 - croissances comparées. Si $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$: $a^n \gg n^\alpha \gg (\ln n)^\beta$ où $v_n \gg u_n$ signifie $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$. (*Les relations $n^n \gg n! \gg a^n$ n'ont pas été données en cours.*)
 - suites équivalentes, opérations sur les équivalents, équivalents usuels (voir question de cours pour les équivalents à connaître)
 - Si $u_n \gg v_n$ alors $u_n + v_n \sim u_n$, application aux limites de quotient de polynômes en $+\infty$
- exemples d'étude des suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$: *Les résultats ci-dessous doivent être redémontrés pour l'exemple étudié. La représentation graphique n'a pas été abordée en classe.*
 - notion d'intervalle stable
 - si f est croissante alors (u_n) est monotone de sens donné par le signe de $u_1 - u_0$. **Seul le cas f croissante a été traité en cours**
 - si $u_n \rightarrow \ell$ et si f continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$

2 Informatique en langage Python

Listes :

- parcours d'une liste par indices
- sous-listes $L[p:q]$, $L[p:]$, $L[:q]$, $L[p:q:r]$ d'une liste L
- recherche d'un "facteur" dans une liste (exemple : recherche d'un mot dans un texte)
- modification d'un élément d'une liste
- suppression d'un élément d'une liste avec la commande `pop`

3 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Donner la définition avec des quantificateurs de : (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, ou de : (u_n) tend vers $+\infty$, ou de : (u_n) tend vers $-\infty$ et savoir l'expliquer sur un dessin.
2. Énoncer un des théorèmes suivants : théorème de la limite monotone (cas limite finie et limite infinie), théorème d'encadrement, théorème des suites adjacentes, théorème de comparaison.
3. Pour $n \geq 2$ on pose $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}$. Montrer que (u_n) converge. Indication : $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que la suite (a_n) converge en montrant que les suites $(u_n) = (a_{2n})$ et $(v_n) = (a_{2n+1})$ sont adjacentes.
5. Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{u_n}$. Démontrer que (u_n) diverge vers $+\infty$. On montrera que (u_n) est croissante et ne peut pas converger.
6. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites non nulles à partir d'un certain rang, donner la définition de $u_n \sim v_n$. Énoncer ensuite un ou plusieurs des équivalents usuels (valables si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$) parmi :

<ul style="list-style-type: none"> • si $\alpha \neq 0$, <li style="padding-left: 20px;">$(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ • $e^{u_n} - 1 \sim u_n$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ • $\sin(u_n) \sim u_n$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\tan(u_n) \sim u_n$ • $\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$
--	---	---
7. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
8. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \rightarrow I$ une fonction croissante et soit $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer que si $u_1 \geq u_0$ alors (u_n) est croissante.
9. Écrire une fonction Python `transforme` prenant en argument une liste et la renvoyant après avoir transformé tous les 4 qu'elle contient en des 5.
10. Écrire une fonction Python `miroir` prenant en argument une liste et renvoyant la liste inversée. Par exemple `miroir([1,2,3])` doit renvoyer `[3,2,1]`. Le colleur pourra imposer, ou non, que la liste prise en argument ne soit pas modifiée par l'exécution de la fonction.

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type remédiation" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Feuille de cours 10, exos 3 et 4 page 9 (limites en utilisant une croissance comparée ou un équivalent) : <https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=5689>

La question de cours est notée sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.