T.D 10 : exo 14 (remarques en rouge, corrigé en noir)

1) Une récurrence n'était pas utile (inutile de savoir que $u_n \geq 0$ pour affirmer que $\sqrt{1+u_n^2} \geq 0$). Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n=0$ alors $u_0 = \frac{1}{2} \geq 0$; et si $n \geq 1$ alors $u_n = \sqrt{1+u_{n-1}^2} \geq 0$ (car une racine carrée est toujours positive). Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient de fonc° dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$ donc $f \nearrow$ sur $\mathbb{R}^+$

(⚠ à l'erreur $\mathbb{Q}x$)

3) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$.
Pour $n=0$, $u_1 = \sqrt{1+u_0^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \geq \frac{1}{2} = u_0$.
Supposons que $u_{n+1} \geq u_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Comme $f \nearrow$ sur $\mathbb{R}^+$ et que $u_n, u_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ on a $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ i.e. $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ cqfd.
Ainsi $(u_n) \nearrow$ (⚠ aux inégalités strictes incorrectes : $x \geq y \not\Leftrightarrow x > y$)

4) Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}$ (comme l'énoncé ne le fait pas, c'est à vous d'introduire la notation l pour $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$, vous ne pouvez pas juste écrire l sans expliquer ce que vous notez l). Alors $\sqrt{1+u_n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{1+l^2}$ et $u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$
En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$ on obtient $l = \sqrt{1+l^2}$ donc $l^2 = 1+l^2$ donc $1=0$ ce qui est absurde. Donc (u_n) ne peut pas converger.

5) (u_n) est $\nearrow$ et ne converge pas, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (ou encore "(u_n) diverge vers $+\infty$", mais pas "(u_n) diverge" tout court car "diverger" = "ne pas converger" !). Par ailleurs l'argument exact est bien ici "(u_n) est $\nearrow$ et ne cv pas" et non "(u_n) est $\nearrow$ et n'est pas majorée" En effet à la ques° précédente on a mq (u_n) ne pouvait pas converger. Certes, elle ne peut donc pas ê majorée car sinon elle convergerait puisqu'elle est $\nearrow$, mais encore faudrait-il expliquer cela si vous voulez utiliser qu'elle n'est pas majorée.

10,5