Calcul de primitives

Rappel : $\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b$ où F est primitive de f c'est-à-dire que
On parle bien d'**une** primitive car en fait, si F est une primitive de f sur un intervalle I les primitives de f sur I sont les

1 Primitives immédiates

Dans le tableau suivant, on donne des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et leurs primitives $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sur un intervalle I en notant $c \in \mathbb{R}$ la constante d'intégration.

$f(x)$	I	$F(x)$
$a\ (a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$ax + c$
$x^n\ (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x^n\ (n \in \mathbb{Z}$ avec $n \leq -2)$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(x) + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_-^*$	$\ln(-x) + c$
$x^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$	$\mathbb{R}_*^+$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\exp(x) + c$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	
$\cos x$	$\mathbb{R}$	
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x) + c$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	

Exercice 1
Déterminer les primitives des fonctions suivantes ou calculer les intégrales demandées :

1. $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$
2. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$
3. $x \longmapsto \dfrac{1}{3x} + \ln(2x)$ sur $\mathbb{R}_*^+$
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^7} + 7\,dx$
5. $x \longmapsto \dfrac{1}{5x+2}$ sur $]-\dfrac{2}{5}, +\infty[$
6. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{5x+2}\,dx$

Attention : Que pensez-vous du raisonnement suivant ?

$$\text{« \textit{Une primitive de} } \cos \textit{ est } \sin\textit{, et comme la dérivée de } x \longmapsto x^2 \textit{ est } x \longmapsto 2x,$$
$$\textit{alors une primitive de } f : x \longmapsto \cos(x^2) \textit{ est } F : x \longmapsto \frac{\sin(x^2)}{2x} \text{ »}$$

En fait, on ne peut intégrer $f(u(x))$ en $\dfrac{F(u(x))}{u'(x)}$ que si

C'est donc que de manière générale, il faut reconnaître une expression du type $u'(x)f(u(x))$ pour pouvoir l'intégrer en $F(u(x))$ (et non du type $f(u(x))$).

2 Primitives par composée

Rappel : Soient $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $F : u(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables alors la fonction $F \circ u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et $(F \circ u)' = u' \times (F' \circ u)$.

Ainsi, si on reconnaît un “motif” en $u'(x)F'(u(x))$ on peut intégrer en $F(u(x)) + c$!

“motif” en $u'(x)F'(u(x))$	Primitive en $F(u(x)) + c$	valable sur tout intervalle où
$u'(x)\ u(x)^n\ (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1} + c$	u dérivable
$u'(x)\ u(x)^n\ (n \in \mathbb{Z}$ avec $n \leq -2)$	$\dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1} + c$	u dérivable et ne s'annule pas
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$		u dérivable et strictement positive
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$		u dérivable et strictement négative
$u'(x)\ u(x)^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$	$\dfrac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	u dérivable et ne s'annule pas
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$		
$u'(x)\, e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + c$	u dérivable
$u'(x)\ \sin(u(x))$		u dérivable
	$\sin(u(x)) + c$	u dérivable
$\dfrac{u'(x)}{u(x)^2+1}$	$\arctan(u(x)) + c$	u dérivable

Exercice 2
Donner les primitives des fonctions suivantes sur les intervalles demandés ou calculer les intégrales demandées :

1. (a) $f_1 : x \longmapsto \cos(x)\sin(x)^5$ sur $\mathbb{R}$
   (b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\,dx$
   (c) $f_3 : x \longmapsto e^{\cos(x)}\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$
   (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{5x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$
   (e) $f_5 : x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ sur $]0,\pi[$
   (f) $f_6 : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)^4}{x}$ sur $\mathbb{R}_*^+$
2. (a) $g_1 : x \longmapsto x\sin(2x^2+1)$ sur $\mathbb{R}$
   (b) $g_2 : x \longmapsto xe^{2x^2}$ sur $\mathbb{R}$
   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$
   (d) $g_4 : x \longmapsto \tan(x)$ sur $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$
   (e) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$