Exercice 1

1. Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dont le tableau de variations est le suivant :

x	0		1		6		$+\infty$
f	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Déterminer $f([0,1[)$, $f([1,6])$ et $f([1,+\infty[)$.

2. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dont le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
g	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Déterminer $g(]3, +\infty[)$ et $g(]-\infty, 3])$.

3. Soit $h : \mathbb{R}\backslash\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dont le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
h	$+\infty$	$\searrow$	$0 \;\Vert\; 0$	$\searrow$	-2

Déterminer $h(]1, +\infty[)$ et $h(]-\infty, 1[)$.

Exercice 2

1. Soit $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \exp(\sqrt{x}) \end{array}$. Montrer que f est injective mais n'est pas surjective.
2. Soit $\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\infty, 2] \\ & & x & \longmapsto & 2 - x^2 \end{array}$. Montrer que g est surjective mais n'est pas injective.

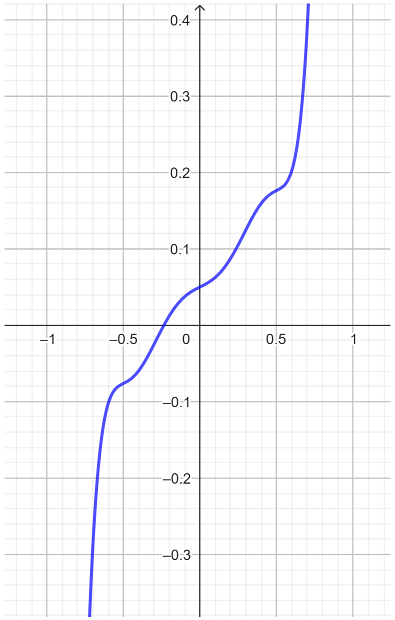
Exercice 3

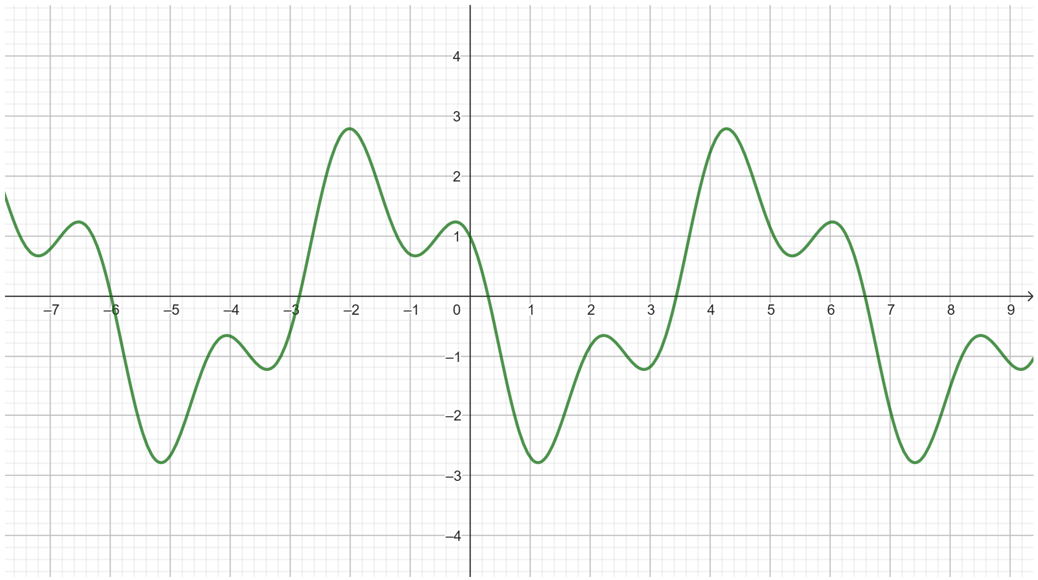
Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$. Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de $g \circ f$? Montrer que :

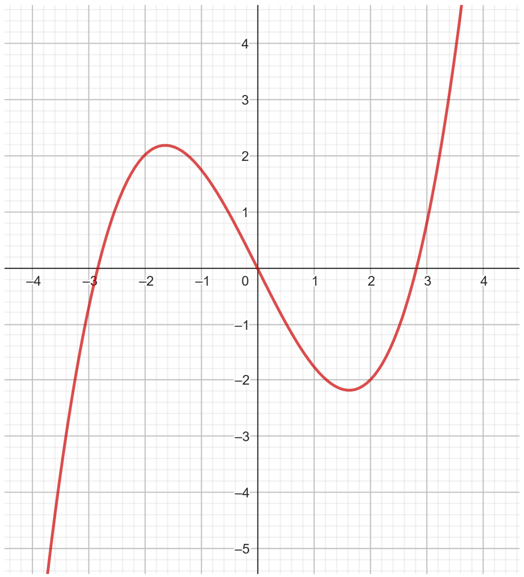
1. si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2. si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

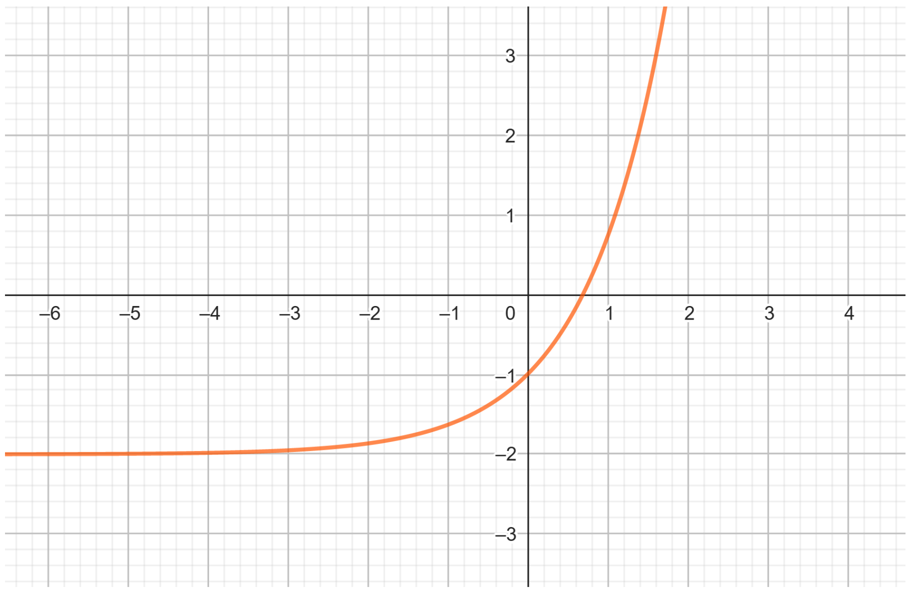
Exercice 4

La page ci-après présente (en mode paysage !) les graphes de quatre fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer si ces fonctions sont injectives et/ou surjectives.


0.4
0.3
0.2
0.1
−1
−0.5
0
0.5
1
−0.1
−0.2
−0.3


4
3
2
1
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
−1
−2
−3
−4


4
3
2
1
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
−1
−2
−3
−4
−5


3
2
1
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
−1
−2
−3

Exercice 5
Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Donner le cas échéant leur bijection réciproque.

1) $\begin{array}{llcl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & : & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$

2) $\begin{array}{llcl} g & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & : & x & \longmapsto & (x^2, e^x) \end{array}$

3) $\begin{array}{llcl} h & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & : & (x,y) & \longmapsto & (x+2y, 2x-y) \end{array}$

Exercice 6
On considère la fonction suivante : :

$$\begin{array}{llcl} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & : & (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y, x+z, y+z) \end{array}$$

Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 7
Soit la fonction numérique f donnée par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1. Faire l'étude complète de f.
2. Donner l'allure du graphe de f et la vérifier à l'aide de GeoGebra (`https://www.geogebra.org/classic?lang=fr`).
3. Déterminer par lecture graphique deux intervalles I et J tels que $f : I \longrightarrow J$ soit une bijection.
4. Démontrer le résultat énoncé à la question précédente grâce à un théorème du cours.
5. Déterminer l'expression de $f^{-1} : J \longrightarrow I$.

Exercice 8
Soit th la fonction numérique donnée par

$$th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Faire l'étude de th.
2. Donner des intervalles I et J tels que $th : I \longrightarrow J$ soit une bijection.
3. Déterminer la bijection réciproque $th^{-1} : J \longrightarrow I$.

Exercice 9
Soit f la fonction numérique donnée par

$$f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{1+x}}.$$

1. Faire l'étude de f.
2. Donner des intervalles I et J tels que $f : I \longrightarrow J$ soit une bijection. *(On pourra vérifier sa réponse sur Geogebra avant de passer à la question suivante.)*
3. Déterminer la bijection réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$.

Exercice 10
Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln(1 + e^x)$$

est bijective, et déterminer f^{-1}. En déduire la bijection réciproque de

$$g : x \longmapsto \Big(\ln(1 + e^x)\Big)^3.$$

Exercice 11
Pour $a \in \mathbb{R}$ on considère la fonction

$$\begin{array}{cccc} f_a & : & \mathbb{R}\backslash\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & : & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-a} + a \end{array}$$

1. Montrer que $Im(f_a) \subset \mathbb{R}\backslash\{a\}$.
2. Calculer $f_a \circ f_a$. Que peut-on en conclure ? Illustrer ce fait graphiquement.